

Verallgemeinerung und Vereinheitlichung der Wirbelsätze
ebener und rotationssymmetrischer Flüssigkeitsbewegungen

Von C. Truesdell, Universität Maryland, USA.

Es wird ein einfacher, rein kinematischer Erhaltungssatz des Wirbelbetrages bewiesen, der für Bewegungen gilt, die „komplex-lamellar“ sind und noch eine weitere Bedingung erfüllen. Dieser Satz umfaßt die aus der klassischen Hydrodynamik und der Gasdynamik bekannten Wirbelsätze für ebene und rotationssymmetrische Flüssigkeitsbewegungen und liefert eine Verallgemeinerung für sie.

A simple kinematical conservation theorem for a scalar magnitude associated with the vorticity is shown to be valid for complex-lamellar motions satisfying a certain further condition. This theorem includes and generalizes the known vortex theorems for plane and rotationally symmetric motions, both for classical hydrodynamics and for gas dynamics.

On démontre un simple théorème cinématique, d'après lequel une quantité scalaire liée avec le vecteur tourbillon se conserve dans tout mouvement complex-lamellaire qui satisfait aussi à une certaine condition. Ce théorème renferme et généralise les théorèmes tourbillonnaires déjà connus pour les mouvements plans ou jouant de symétrie de révolution, et dans l'hydrodynamique classique et dans la dynamique des gaz.

Доказывается простая чисто кинематическая теорема о сохранении величины вихря скорости, действительная для движений, лихих вихрей которых перпендикулярны к линиям тока и удовлетворяющих еще одному дальнейшему условию. Эта теорема включает в себя и обобщает известные теоремы классической гидродинамики и газовой динамики для плоских и осесимметричных движений жидкости.

I. Die bekannten Wirbelsätze

Schon J. L. d'Alembert, dessen Arbeiten große Fortschritte für die analytische Hydrodynamik einleiteten, hat zum ersten Mal einen Wirbelsatz entdeckt. In einer Auseinandersetzung mit L. Euler über die Möglichkeit von Wirbelbewegungen¹⁾ bewies er folgende, hier etwas allgemeiner und moderner formulierte Behauptung^{2) 3)}:

D'Alembertscher Wirbelsatz [1761]:

Gegeben sei eine stetige, ebene Flüssigkeitsbewegung mit der Geschwindigkeit v , der Beschleunigung a und der Dichte ρ . Es sei

$w \equiv \operatorname{rot} v \dots \dots \dots (1)$

der Wirbelvektor, w sein Betrag. Der Beschleunigungsvektor a erfülle die d'Alembert-Eulersche Bedingung⁴⁾

$\operatorname{rot} a = 0 \dots \dots \dots (2).$

Dann gilt während der Bewegung für jedes Flüssigkeitsteilchen:

$\frac{w}{\rho} = \operatorname{const} \dots \dots \dots (3).$

Ganz analog lautet der

¹⁾ Die Bezeichnung „Wirbelbewegungen“ wurde erst viel später von Stokes (1845) und Helmholtz (1858) eingeführt.
²⁾ Die Literaturhinweise werden durch die Jahreszahlen der betreffenden Veröffentlichungen gegeben. Man vergleiche hierzu das Verzeichnis am Ende der Abhandlung.
³⁾ [1761, § XIII]. Der d'Alembertsche Beweis gilt nur für die Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit, deren Geschwindigkeitsvektor die Form $v(x, t) = \bar{v}(t) \cdot v(x)$ hat. In den Lehrbüchern wird dieser Satz Helmholtz zugeschrieben.
⁴⁾ Sowohl J. L. d'Alembert [1752, § 86], [1761, §§ X, XV] (im Falle der ebenen Bewegung) als auch L. Euler [1757, § XXXV], [1770, §§ 42–43], [1806, §§ 154–155] (im allgemeinen räumlichen Fall) gründen ihre Theorie der Flüssigkeitsbewegung auf dieser fundamentalen Annahme (2). Nach E. Beltrami [1871, § 12] ist diese Bedingung notwendig und hinreichend dafür, daß sich die (schon früher von Hankel [1861] und Lord Kelvin [1869] eingeführte) Zirkulation jeder geschlossenen flüssigen Linie während der Bewegung nicht ändert. Unter der Voraussetzung konservativer Massenkräfte ist die Bedingung erfüllt, wenn die Flüssigkeit ohne Reibung betrachtet werden kann und eine Gleichung der Form $f(p, \rho) = 0$ gilt oder wenn sie inkompressibel ist, einen konstanten Zähigkeitskoeffizienten besitzt und überall die Gleichung $\operatorname{rot} \operatorname{rot} w = 0$ erfüllt (Kelvinscher bzw. Craigscher Satz).

Svanbergsche Wirbelsatz [1841]⁵⁾:

Gegeben sei eine stetige, rotationssymmetrische Flüssigkeitsbewegung um die z -Achse, die die d'Alembert-Eulersche Bedingung (2) erfüllen möge. r sei der Abstand von der z -Achse. Dann gilt während der Bewegung für jedes Flüssigkeitsteilchen

$$\frac{w}{r \cdot \varrho} = \text{const} \quad (4).$$

In den eleganten Helmholtzschen Wirbelsätzen finden bekanntlich die beiden obigen Ergebnisse ihre räumliche Verallgemeinerung.

Folgende Frage ist jedoch bisher noch nicht beantwortet worden:

Frage 1: Gibt es eine Klasse von Flüssigkeitsbewegungen, die die ebenen und rotationssymmetrischen, aber nicht notwendig alle räumlichen Fälle umfaßt und für die ein finiter, skalarer Wirbel-Erhaltungssatz von der Form

$$\frac{w}{h \cdot \varrho} = \text{const} \quad (5)$$

(h = geeignete skalare Funktion) gilt? — —

Bei wirbelhaften Gasbewegungen ist die d'Alembert-Eulersche Bedingung (2) im allgemeinen nicht erfüllt; deshalb gelten die Helmholtzschen Sätze im allgemeinen nicht. Jedoch hat L. Crocco⁶⁾ in einem Spezialfall zwei interessante, den rein kinematischen Sätzen von d'Alembert und Svanberg formal ganz analoge dynamische Wirbelsätze entdeckt. Diese wurden vor drei Jahren von R. Prim⁷⁾ wesentlich verallgemeinert und lauten:

1. Crocco-Primscher Satz [1936, 1947]

Gegeben sei ein ideales Gas ($p = \varrho \cdot R \cdot T$) mit konstanter spezifischer Wärme in einer stetigen, ebenen, stationären, massenkräftefreien Bewegung ohne Wärmeleitung. Es sei v_0 die unter diesen Voraussetzungen vorhandene und längs jeder Stromlinie konstant bleibende Grenzgeschwindigkeit; es sei v_c der sogenannte Croccosche Vektor

$$v_c \equiv \frac{v}{v_0} \quad (6),$$

sein Wirbelvektor sei

$$w_c \equiv \text{rot } v_c \quad (7)$$

p sei der Druck. Dann gilt längs jeder Stromlinie:

$$\frac{w_c}{p} = \text{const} \quad (8).$$

2. Crocco-Primscher Satz [1936, 1947]

Es sei eine um die z -Achse rotationssymmetrische Gasbewegung gegeben, die die entsprechenden Voraussetzungen des ersten Satzes erfüllen möge. Dann gilt längs jeder Stromlinie:

$$\frac{w_c}{r \cdot p} = \text{const} \quad (9).$$

Somit ergibt sich eine der Frage 1 ganz analoge, bisher noch nicht beantwortete

Frage 2: Gibt es einen finiten, skalaren Wirbelerhaltungssatz von der Form

$$\frac{w_c}{h \cdot p} = \text{const} \quad (10),$$

für eine die ebenen und rotationssymmetrischen Fälle einschließende Bewegungsklasse?

Außerdem ergeben sich zwei weitere Fragen.

⁵⁾ A. F. Svanberg hat in Wirklichkeit folgenden, etwas allgemeineren Zusammenhang bewiesen [1841, § 4]: a) Sei ein Zylinder-Koordinaten-System r, ϑ, z gegeben. Ist die Winkelbeschleunigung $a_\vartheta = 0$, dann ist (entsprechend dem zweiten Keplerschen Satz) $r \cdot v_\vartheta = B$, wobei B eine für jedes Flüssigkeitsteilchen konstant bleibende Funktion ist. b) Ist B eine absolute Konstante und ist auch (2) erfüllt, so gilt (4). Das Ergebnis b) folgt aus dem im Text formulierten Satz durch Superponieren einer starren Drehung um die z -Achse. In den Lehrbüchern ist auch der Svanbergsche Satz Helmholtz zugeschrieben.

⁶⁾ Bei L. Crocco [1936, S. 4–7] ist die Untersuchung unter der Voraussetzung $v_0 = \text{const.}$ (iso-energetische Strömung) durchgeführt. Die Notwendigkeit dieser Voraussetzung für die Croccosche Formulierung wurde erst später von Emmons [1944, App. I] und Vazsonyi [1945, §§ 8, 10] bemerkt.

⁷⁾ [1947].

Frage 3: Gibt es einen den zwei Crocco-Primschen Sätzen bzw. der Gleichung (10) analogen Erhaltungssatz von der Form

$$\frac{w_c}{h \cdot F(p)} = \text{const} \dots \dots \dots (11),$$

der bei Bewegungen nicht idealer Gase gültig ist?

Frage 4: Gibt es einen einfachen, direkten Zusammenhang zwischen den kinematischen Wirbelsätzen von d'Alembert und Svanberg und den beiden dynamischen Wirbelsätzen von Crocco und Prim?

In diesem Aufsatz beantworte ich diese vier Fragen im positiven Sinne durch einen einzigen, neuen, rein kinematischen Satz über den Betrag des Wirbelvektors w_c . Dieser schließt (5) und (11) als Spezialfälle ein und liefert somit eine doppelte Erweiterung der bekannten Wirbelsätze:

1. Eine Erweiterung der Bewegungsklasse.
2. Eine Erweiterung der physikalischen Flüssigkeitsart, die eines skalaren Wirbel-Erhaltungssatzes fähig ist.

II. Der neue kinematische Wirbelsatz

Seit H. v. Helmholtz und Lord Kelvin bildet man häufig Wirbelsätze mit Hilfe von Flächen- und Linienintegralen. Da jedoch ein finiter Wirbel-Erhaltungssatz für Flüssigkeitsteilchen, also mathematisch für einzelne Punkte gesucht wird, gehe ich hier von der Aufstellung einer Differentialgleichung aus. Dies entspricht dem Verfahren, das J. L. Lagrange⁸⁾ bei der Entwicklung des Theorems vom Geschwindigkeits-Potential benutzte.

Um den neuen Wirbelsatz in einer Form herzuleiten, der ihn für mehrere ganz verschiedene dynamische Anwendungen geeignet macht, seien zunächst einige mathematisch bequeme Hilfs-Parameter eingeführt, die keine physikalische Bedeutung haben.

Es sei v_0 eine für jedes Flüssigkeitsteilchen konstant bleibende Funktion:

$$\frac{Dv_0}{Dt} = 0 \dots \dots \dots (12).$$

Es sei

$$v_c \equiv \frac{v}{v_0} \dots \dots \dots (13)$$

der allgemeine „Croccosche Vektor“,

$$w_c \equiv \text{rot } v_c \dots \dots \dots (14)$$

der „Croccosche Wirbelvektor“. A sei eine skalare Funktion. Dann läßt sich durch einfache vektorielle Transformationen zeigen, daß folgende Gleichung gilt:

$$\text{rot} \left\{ A \left(\frac{1}{v_0} \frac{\partial v_c}{\partial t} + w_c \times v_c \right) \right\} = \text{grad} \left(\frac{A}{v_0} \right) \times \frac{\partial v_c}{\partial t} - \frac{w_c}{v_0} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{v_0} \frac{\partial (A w_c)}{\partial t} + v_c \cdot \nabla (A w_c) - A w_c \cdot \nabla v_c + A w_c \text{div } v_c - v_c \text{div} (A w_c) \dots \dots (15).$$

Sei nun A als Lösung der Gleichung

$$\text{grad} \left(\frac{A}{v_0} \right) \times \frac{\partial v_c}{\partial t} = \frac{w_c}{v_0} \frac{\partial A}{\partial t} \dots \dots \dots (16)$$

gewählt, und sei $v \neq 0$ irgend eine Lösung der Gleichung⁹⁾

$$\frac{1}{v_0} \frac{D \log v}{Dt} = -\text{div } v_c \dots \dots \dots (17).$$

Dann folgt aus (15)^{10) 11)}

$$\frac{1}{v} \text{rot} \left\{ A \left(\frac{1}{v_0} \frac{\partial v_c}{\partial t} + w_c \times v_c \right) \right\} = \frac{1}{v_0} \frac{D}{Dt} \left(\frac{A w_c}{v} \right) - \frac{A w_c}{v} \cdot \nabla v_c - \frac{v_c}{v} \text{div} (A w_c) \dots \dots (18).$$

⁸⁾ [1781, §§ 17–19.]

⁹⁾ Von solchen Lösungen gibt es für jede stetige Bewegung unendlich viele.

¹⁰⁾ Es sei bemerkt, daß der Spezialfall $A = v_0 = 1$ die grundlegende kinematische Wirbeldifferentialgleichung von E. Beltrami [1871, § 6] liefert. Die sogenannte „Helmholtzsche“ Gleichung, die daraus unter Voraussetzung von Gleichung (2) entsteht, wurde schon von J. L. Lagrange [1760, Ch. XLII] entdeckt.

¹¹⁾ Ich danke Herrn Diplom-Physiker E. A. Müller, Göttingen, für seine Kritik an dieser Stelle.

Um von hier aus zu einer skalaren Gleichung zu kommen, bilde ich das Skalarprodukt der Gl. (18) mit $\frac{A w_e}{v}$ und erhalte¹²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2 v_0} \frac{D}{Dt} \left(\frac{A w_e}{v} \right)^2 &= \left(\frac{A w_e}{v} \cdot \nabla v_e \right) \cdot \frac{A w_e}{v} + \frac{A}{v^2} (v_e \cdot w_e) (w_e \cdot \text{grad } A) \\ &+ \frac{A w_e}{v^2} \cdot \text{rot} \left\{ A \left(\frac{1}{v_0} \frac{\partial v_e}{\partial t} + w_e \times v_e \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots (19).$$

Diese neue kinematische Gleichung ist der Schlüssel zur Beantwortung aller oben gestellten Fragen und zur Vereinheitlichung der Aussagen über den Betrag des Wirbelvektors.

Von hier an setze ich voraus, daß das Geschwindigkeitsfeld „komplex-lamellar“ ist. Dies bedeutet, daß es Normalflächen besitzt. Nach Lord Kelvin¹³⁾ muß für solche Felder die Gleichung

$$w \cdot v = 0 \dots \dots \dots (20)$$

gelten. Der Wirbelvektor steht also senkrecht auf der Stromlinie. Bekanntlich sind die ebenen und rotationssymmetrischen Vektorfelder Spezialfälle dieser Klasse. Es folgt auch unmittelbar, daß die Normalflächen des Geschwindigkeitsfeldes Wirbelflächen und umgekehrt die Stromflächen Normalflächen des Wirbelvektorfeldes sind. Das Wirbelvektorfeld w ist also ebenfalls komplex-lamellar. Mit

$$w = \text{rot}(v_0 v_e) = v_0 w_e + \text{grad } v_0 \times v_e \dots \dots \dots (21)$$

folgt die reine Identität

$$w \cdot v = v_0^2 w_e \cdot v_e \dots \dots \dots (22).$$

Also ist auch der Croccosche Vektor einer komplex-lamellaren Bewegung komplex-lamellar. Man sieht außerdem, daß auch die Umkehrung dieses Satzes richtig ist.

Ich setze jetzt die Gültigkeit der Gleichung

$$w_e \cdot \text{rot} \left\{ A \left(\frac{1}{v_0} \frac{\partial v_e}{\partial t} + w_e \times v_e \right) \right\} = 0 \dots \dots \dots (23)$$

voraus. Dann geht Gleichung (19) über in

$$\frac{1}{2 v_0} \frac{D}{Dt} \left(\frac{A w_e}{v} \right)^2 = \left(\frac{A w_e}{v} \cdot \nabla v_e \right) \frac{A w_e}{v} \dots \dots \dots (24).$$

Umgeformt ist dies

$$\frac{1}{v_0} \frac{D}{Dt} \log \frac{A w_e}{v} = \frac{w_e}{w_e} \cdot \left(\frac{w_e}{v_e} \cdot \nabla v_e \right) \dots \dots \dots (25)$$

Dabei ist die rechte Seite von (25) diejenige Komponente des in Richtung von w_e genommenen Richtungs-differentialquotienten $\frac{\partial v_e}{\partial s}$, die in Richtung von w_e fällt. Ich wähle nun als örtliche krummlinige Koordinaten die Wirbellinien (die Koordinaten auf ihnen seien mit x_w bezeichnet) sowie zwei zu ihnen und untereinander orthogonale Kurvenscharen mit den Koordinaten x_2 und x_3 . Dann ergibt sich für das Linienelement

$$ds^2 = h^2 dx_w^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2 \dots \dots \dots (26)$$

Benutzt man diese Definitionen in Gleichung (25), so erhält man nach wohlbekannten Formeln

$$\frac{1}{v_0} \frac{D}{Dt} \log \frac{A w_e}{v} = \frac{1}{h} \frac{\partial \left(\frac{v_w}{v_0} \right)}{\partial x_w} + \frac{v_2}{h h_2 v_0} \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{v_3}{h h_3 v_0} \frac{\partial h}{\partial x_3} \dots \dots \dots (27).$$

Mit den Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten

$$v_2 = h_2 \frac{D x_2}{D t}; \quad v_3 = h_3 \frac{D x_3}{D t}; \quad v_w = h \frac{D x_w}{D t} \dots \dots \dots (28)$$

folgt somit aus (27):

$$\frac{D}{D t} \log \frac{A w_e}{h \cdot v} = \frac{v_0}{h} \frac{\partial \left(\frac{v_w}{v_0} \right)}{\partial x_w} - \frac{v_w}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x_w} - \frac{\partial \log h}{\partial t} \dots \dots \dots (29).$$

¹²⁾ Die Anregung hierzu stammt aus einer speziellen und nicht ganz befriedigenden Arbeit von J. Warren [1870]. Die Untersuchungen von Warren sind für nicht ebene Bewegungen fehlerhaft.

¹³⁾ [1851, §§ 69, 75.]

Macht man noch die einschränkende Annahme

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \dots \quad (30)$$

(sie bedeutet, daß die Wirbellinien stationär sind oder, was für ein komplex-lamellares Geschwindigkeitsfeld dasselbe ist, daß die den Wirbellinien normalen Stromflächen stationär sind), dann verschwindet das dritte Glied rechts in (29), und wegen (20) verschwinden auch die beiden anderen. Man erhält also einfach

$$\frac{Aw_e}{h \cdot v} = \text{const} \quad \dots \quad (31)$$

für jedes Flüssigkeitsteilchen.

Die Zusammenfassung der vorangehenden Untersuchungen ist

Der neue kinematische Satz über den Betrag des Croccoschen Wirbelvektors.

Gegeben sei eine stetige Flüssigkeitsbewegung, die in stationären, den Wirbellinien normalen Stromflächen $x_w = \text{const.}$ stattfindet (d. h. eine komplex-lamellare Bewegung mit stationären Wirbellinien); es sei h der normale Abstand zweier benachbarter Stromflächen x_w und $x_w + dx_w$, also

$$ds^2 = h^2 dx_w^2 + \dots \quad \dots \quad (W 1),$$

es sei v_0 eine beliebige, substantiell konstante Funktion:

$$\frac{Dv_0}{Dt} = 0 \quad \dots \quad (W 2)$$

Es seien v_e und w_e durch die Gleichungen

$$v_e \equiv \frac{v}{v_0}, \quad w_e \equiv \text{rot } v_e \quad \dots \quad (W 3)$$

definiert; es sei A eine Lösung der Gleichung

$$\text{grad} \left(\frac{A}{v_0} \right) \times \frac{\partial v_e}{\partial t} = \frac{w_e}{v_0} \frac{\partial A}{\partial t} \quad \dots \quad (W 4)$$

und v eine Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{v_0} \frac{\partial v}{\partial t} + \text{div} (v v_e) = 0 \quad \dots \quad (W 5).$$

Wenn es dann möglich ist, v_0 und A so zu wählen, daß sie außer (W 2) bzw. (W 4) noch die Gleichung

$$w_e \cdot \text{rot} \left\{ A \left(\frac{1}{v_0} \frac{\partial v_e}{\partial t} + w_e \times v_e \right) \right\} = 0 \quad \dots \quad (W 6).$$

erfüllen, dann ist während der Bewegung die Funktion

$$\frac{Aw_e}{h v}$$

für jedes Flüssigkeitsteilchen konstant.

Es sei bemerkt, daß nur die Bedingung (W 6) einschränkend ist, da man stets unendlich viele Funktionen, die die übrigen, nur definierenden Bedingungen befriedigen, finden kann.

III. Erste Anwendung: Ein neuer Wirbelsatz der klassischen Hydrodynamik

Es sei die d'Alembert-Eulersche Bedingung (2), die die klassische Hydrodynamik charakterisiert, erfüllt. Nach J. L. Lagrange¹⁴⁾ gilt die rein kinematische Identität

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + w \times v + \text{grad} \frac{v^2}{2} \quad \dots \quad (32),$$

daher ist die Gleichung

$$\text{rot} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + w \times v \right) = 0 \quad \dots \quad (33)$$

der d'Alembert-Eulerschen Bedingung (2) äquivalent. Die Bedingungen (W 2) und (W 4) werden durch die Wahl $v_0 \equiv 1$, $A \equiv 1$ befriedigt; damit folgt $v_e = v$, $w_e = w$; somit ist

¹⁴⁾ [1781, § 14.]

wegen (33) auch (W6) erfüllt. Setzt man $v \equiv \varrho$, so wird auch (W5) befriedigt. Dann folgt auf Grund unseres kinematischen Wirbelsatzes

Der neue Wirbelsatz der klassischen Hydrodynamik.

Gegeben sei eine stetige Flüssigkeitsbewegung, die in stationären, auf den Wirbellinien senkrecht stehenden Stromflächen stattfinden und die d'Alembert-Eulersche Bedingung (2) erfüllen möge. Dann ist während der Bewegung für jedes Flüssigkeitsteilchen

$$\frac{w}{h \cdot \varrho} = \text{const} \quad \dots \quad (34),$$

wobei die Funktion h durch (W1) definiert ist.

Im Spezialfall einer ebenen Bewegung folgt nach (W1) $h = 1$; daher ergibt (34) den d'Alembertschen Wirbelsatz. Im Spezialfall einer rotationssymmetrischen Bewegung folgt gemäß (W1) $h = r$, Gleichung (34) ergibt also den Svanbergschen Wirbelsatz.

Damit ist Frage 1 beantwortet.

IV. Zweite Anwendung: Ein neuer Wirbelsatz der Gasdynamik

Ich betrachte eine stationäre Gasbewegung ohne Wärmeleitung und in Abwesenheit von Massenkräften. Dann existiert bekanntlich eine Grenzgeschwindigkeit v_0 , die konstant längs jeder Stromlinie ist und daher (W2) befriedigt. Da die Bewegung stationär ist, ist (W4) für jede Ortsfunktion A von selbst erfüllt.

Ferner betrachte ich nur die vor kurzem von R. Prim¹⁵⁾ eingeführten, sog. „ P -Gase“. Diese werden dadurch definiert, daß sie einer Zustandsgleichung von der Funktionalform

$$\varrho = P(p) H(\eta) \quad (\eta = \text{spez. Entropie}) \quad \dots \quad (35)$$

genügen. Sie enthalten offenbar die idealen Gase als Spezialfall. Nach R. Prim besteht das vollständige Gleichungssystem der stationären Bewegungen von P -Gasen unter den obigen Voraussetzungen aus der Kontinuitätsgleichung

$$\text{div} (P(p) v_c) = 0 \quad \dots \quad (36),$$

der Integrabilitätsbedingung für die Eulersche Bewegungsgleichung

$$\text{rot} \left(\frac{v_c \times w_c}{1 - v_c^2} \right) = 0 \quad \dots \quad (37)$$

und der Bernoullischen Gleichung

$$1 - v_c^2 = \frac{\Pi(p)}{\Pi(p_0)} \quad \dots \quad (38).$$

Dabei ist $\Pi(p)$ definiert durch

$$P(p) = \frac{1}{\Pi'(p)} \quad \dots \quad (39),$$

p_0 ist der längs jeder Stromlinie konstante Staudruck. Nach (36) kann man (W5) durch die Wahl $v \equiv P(p)$ befriedigen. Wegen (37) kann (W6) durch die Festsetzung $\frac{1}{A} \equiv 1 - v_c^2$ erfüllt

werden. Dann läßt sich infolge Gleichung (38) A auch schreiben $A = \frac{\Pi(p_0)}{\Pi(p)}$. Dann folgt auf Grund unseres kinematischen Wirbelsatzes

Der neue Wirbelsatz der Gasdynamik

Gegeben sei eine stetige, stationäre, komplex-lamellare, massenkräftefreie P -Gas-Bewegung ohne Wärmeleitung. Dann ist

$$\frac{w_c}{h \cdot \Pi(p) P(p)} = \frac{w_c}{h} \frac{d \log \Pi(p)}{d p} = \text{const} \quad \dots \quad (40)$$

längs jeder Stromlinie, d. h. $\frac{w_c}{h}$ ist eine angebbare Funktion des Druckes. Die Funktion h ist dabei nach (W1) definiert.

Dieses Ergebnis läßt sich mit dem schönen, von P. Neményi und R. Prim¹⁶⁾ im Jahre 1947 entdeckten Wirbelsatz für Beltramische Gasbewegungen ($w_c \times v_c = 0$) vergleichen.

Im Spezialfall einer ebenen Bewegung wird aus (40)

$$w_c \frac{d \log \Pi(p)}{d p} = \text{const} \quad \dots \quad (41).$$

¹⁵⁾ [1949, 1.]

¹⁶⁾ [1949, 2, Theorem 6.]

Für ein ideales Gas gilt $\Pi(p) \sim p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$, woraus unmittelbar mit Hilfe von (41) der erste Crocco-Primsche Satz folgt.

Im Spezialfall einer rotationssymmetrischen Bewegung wird aus (40)

$$\frac{w_c}{r} \frac{d \log \Pi(p)}{dp} = \text{const} \quad (42),$$

woraus sofort der zweite Crocco-Primsche Satz folgt.

Damit sind die Fragen 2 und 3 beantwortet.

Da der neue Wirbelsatz der klassischen Hydrodynamik und der neue Wirbelsatz der Gasdynamik Spezialfälle unseres allgemeinen kinematischen Wirbelsatzes sind, ist auch die Frage 4 beantwortet.

Es wurde schon bemerkt, daß der d'Alembertsche Wirbelsatz und der Svanbergsche Wirbelsatz unmittelbar aus den Helmholtzschen Wirbelsätzen folgen. Da wir jetzt eine enge Verwandtschaft zwischen dem d'Alembertschen Satz, dem Svanbergschen Satz und den beiden Crocco-Primschen Sätzen entdeckt haben, erhebt sich nun ganz natürlich die Frage, ob die letzteren (entsprechend der Verallgemeinerung der d'Alembertschen und Svanbergschen Ergebnisse in den Helmholtzschen Sätzen) nicht auch verallgemeinert werden können. Leider ist die Antwort darauf negativ. In der klassischen Hydrodynamik ist, wie wir schon gesehen haben, die Wahl $A=1$ eine zulässige; (18) wird dann die wohlbekannte „Helmholtzsche“ Gleichung, aus der die Helmholtzschen Sätze ableitbar sind. In der Gasdynamik wird aber mit $A=\text{const}$ die wichtige Bedingung (W6) nicht erfüllt; das letzte Glied rechts in (18) verschwindet nur, wenn A längs der Wirbellinien konstant bleibt. Daher ist Gleichung (18) im allgemeinen nicht die analoge Gleichung zur „Helmholtzschen“, und es gelten deshalb keine Sätze in der allgemeinen räumlichen Gasdynamik, die den Helmholtzschen Sätzen direkt entsprechen.

Ich vermute, daß noch andere wichtige Anwendungen des neuen kinematischen Wirbelbetrags-Satzes möglich sind, darunter vielleicht solche, die Bewegungen von zähen oder heterogenen Flüssigkeiten betreffen.

Die vorliegende Arbeit bildet einen Teil einer eingehenden Untersuchung der allgemeinen Kinematik von wirbelhaften Bewegungen¹⁷⁾.

Literatur

- 1752 J. L. d'Alembert, Essai d'une nouvelle Théorie de la Résistance des Fluides. Paris.
 1757 L. Euler, Principes généraux du mouvement des fluides. Hist. Acad. R. Sci. Berlin (1755), 274–315.
 1760 J. L. Lagrange: Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique. Misc. Taurinensia 22 (1760–61), 196–298 = Oeuvres 1, 365–468.
 1761 J. L. d'Alembert: Remarques sur les lois du mouvement des fluides; Opusculs 1, 137–168.
 1770 L. Euler: Sectio secunda de principiis motus fluidorum. Novi Comm. Acad. Petrop. 14 (1769), 270–386.
 1781 J. L. Lagrange: Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides; Nouv. Mem. Acad. Sci. Berlin = Oeuvres 4, 595–748.
 1806 L. Euler: Die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper, von H. W. Brandes übersetzt. Leipzig.
 1841 A. F. Svanberg: On fluides rörelse, Kongl. Vetens. Handlingar (1839), 139–154 = Sur le mouvement des fluides. J. Reine u. Angew. Math. 24 (1842), 153–163.
 1851 W. Thomson (Lord Kelvin): A mathematical theory of magnetism. Phil. Trans. R. Soc. London 141, 243–285 = Papers Elect. Mag. §§ 432–523.
 1870 J. Warren: Note on a fundamental theorem in hydrodynamics. Quart. J. Math. 10, 128–129.
 1871 E. Beltrami: Sui principi fondamentale della idrodinamica. Mem. Accad. Sci. Bologna (3) 1, 431 bis 476; 2 (1872), 381–437; 3 (1873), 349–407; 5 (1874), 443–484 = Ricerche sulla cinematica dei fluidi, Opere 2, 202–379.
 1936 L. Crocco: Una nuova funzione di corrente per lo studio del moto rotazionale. Rend. Lincei (6a) 23 = Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation. Z. f. angew. Math. Mech. 17 (1937), 1–7.
 1942 W. Tollmien: Ein Wirbelsatz für stationäre, isoenergetische Gasströmungen. Luftfahrtforschung 19, 145–147.
 1944 H. W. Emmons: The numerical solution of compressible fluid flow problems. Nat. Adv. Comm. Aero. Tech. Note 932.
 1945 A. Vazsonyi: On rotational gas flows. Q. App. Math. 3, 29–31.
 1947 R. Prim: Extension of Crocco's theorems to flows having non-uniform stagnation enthalpy. Phys. Rev. (2) 73, 186.
 1949 I. R. Prim: A note on the substitution principle for steady gas flows. J. Appl. Phys., erscheint demnächst.
 2. P. Neményi und R. Prim: On the steady Beltrami flow of a perfect gas. Proc. 7th. Int. Congr. Appl. Mech., erscheint demnächst.
 1950 C. Truesdell: The kinematics of vorticity. In Vorbereitung.

¹⁷⁾ [1950.]

Lösung eines Minimumproblems der Tragflügeltheorie

Von Karl Nickel in Tübingen

Es wird die dritte Grundaufgabe der Prandtl'schen Theorie der tragenden Linie auf den Fall endlich vieler linearer Nebenbedingungen erweitert und gelöst. Drei Beispiele zeigen praktisch vorkommende Fälle mit solchen Nebenbedingungen.

The third fundamental problem of Prandtl's theory of the supporting line is extended to the case of a finite number of linear accessory conditions, and the solution is given. Three examples are demonstrating the practical occurrence of such cases.

Le troisième problème fondamental de la théorie de la ligne de soutien de Prandtl est étendu au cas d'un nombre fini de conditions secondaires linéaires; on en donne la solution. Trois exemples montrent de tels cas d'occurrence pratique.

В этой работе обобщается и решается третья основная задача теории Прандтля для случая конечного числа линейных дополнительных условий. В трех примерах приводятся встречающиеся на практике случаи с такими дополнительными условиями.

1. Aufgabenstellung

In der Tragflügeltheorie I der „Vier Abhandlungen“¹⁾ gibt L. Prandtl als „Dritte Grundaufgabe“ das folgende Minimumproblem an (a. a. O., S. 28):

„Gegeben ist der Gesamtauftrieb und die Flügelspannweite, außerdem ϱ und V ; gesucht ist diejenige Verteilung des Auftriebs über die Spannweite, bei der der Widerstand ein Minimum wird.“

Mit Hilfe der angegebenen Formeln (a. a. O., S. 27) lautet die mathematische Fassung dieser Aufgabe in einem Koordinatensystem, in dem sich der Tragflügel von -1 bis $+1$ erstreckt:

Es sei

$$w(x) = \frac{1}{4\pi} \oint_{-1}^1 \frac{d\Gamma(y)}{dy} \frac{dy}{x-y} \quad (1)$$

und $\Gamma(-1) = \Gamma(+1) = 0$ [dabei ist $\Gamma(x)$ die örtliche Auftriebsdichte, $w(x)$ die induzierte Abwindgeschwindigkeit an der Stelle x des Flügels]. Die Funktion $\Gamma(x)$ möge im Intervall $\langle -1, +1 \rangle$ so bestimmt werden, daß

$$\int_{-1}^1 \Gamma(x) w(x) dx \quad (2)$$

zu einem Minimum wird unter der Nebenbedingung

$$\int_{-1}^1 \Gamma(x) dx = A \quad (3)$$

$A =$ Gesamtauftrieb beliebig vorgegeben).

Diese Aufgabenstellung wurde von M. Munk³⁾ auf im Raume beliebig gerichteten und verteilten Auftrieb erweitert und allgemein gelöst.

Man kann das obige Minimumproblem auch noch auf andere Art verallgemeinern, indem man statt der Nebenbedingung (3) andere — und evtl. auch mehrere — Nebenbedingungen vorschreibt. Drei Beispiele sollen das näher erläutern:

a) Ein fliegender Tragflügel soll durch einen (kleinen) Querruderausschlag in eine (flache) Kurve gelegt werden. Welche Gestalt muß die Auftriebsverteilung besitzen, die durch den Querruderausschlag zusätzlich zu der symmetrischen Verteilung hinzukommt, damit die Erhöhung des induzierten Widerstands möglichst klein bleibt? Kennt man diese Verteilung, so kann man sie durch passende Rudergestalt annähern, um so beim Querruderausschlag überflüssige Verluste zu vermeiden. Die Frage lautet hier also: Gesucht ist diejenige Auftriebsverteilung, die den induzierten Widerstand (2) zu einem Minimum macht, wenn das Rollmoment

$$\int_{-1}^1 \Gamma(x) x dx \quad (4)$$

einen vorgeschriebenen Wert besitzen soll. — Die Verwendung von Gleichung (1) ist in diesem Falle exakt richtig nur im ersten Augenblick des Querruderausschlages, solange noch keine Dreh- und Rollbewegung vorhanden ist, da nur dann die abgehenden Wirbellinien geradlinig sind.

¹⁾ L. Prandtl und A. Betz: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Neudruck aus den Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg und aus den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen 1927.

²⁾ Unter dem Zeichen \oint soll der Cauchysche Hauptwert des Integrals verstanden sein.

³⁾ M. Munk: Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges. Inaugural-Dissertation. Göttingen 1919.

Immerhin kann man für kleine Dreh- und Rollgeschwindigkeiten die Lösung des formulierten Problems noch als Näherungslösung verwenden.

Eine andere Aufgabe, die auf dasselbe Problem führt, und bei der diese Schwierigkeiten nicht auftreten, wurde mir freundlicherweise von Herrn Prof. Dr. Prandtl mitgeteilt. Es ist dies die Frage nach der Auftriebsverteilung geringsten Widerstandes für einen Tragflügel mit exzentrisch angebrachter Last, durch die ein Rollmoment (4) erzeugt wird.

b) Die Lösung der von Prandtl angegebenen dritten Grundaufgabe lautet [vgl. ¹⁾, S. 32] bei der obigen Formulierung:

$$\Gamma(x) = \frac{2A}{\pi} \sqrt{1-x^2},$$

d. h. der Auftrieb ist nach Art einer Halbellipse über die Spannweite verteilt (vgl. die ausgezogene Linie in Abb. 1). Ändert man nun $\Gamma(x)$ in der gestrichelt eingezeichneten Weise etwas ab, wobei A in (3) seinen Wert behalten soll, so wird sich der induzierte Widerstand (in der Nähe seines Minimums) nur wenig ändern. Das Holmbiegemoment an der Flügelwurzel

$$\int_0^1 \Gamma(x) x dx,$$

das man für symmetrische Auftriebsverteilungen (wenn von einem Faktor 1/2 abgesehen wird) durch

$$\int_{-1}^1 \Gamma(x) |x| dx \quad \dots \dots \dots (5)$$

ersetzen kann, wird jedoch kleiner geworden sein.

Für einen freifliegenden Tragflügel bedeutet das folgendes: Infolge der verringerten Beanspruchung kann der Flügel gewichtlich leichter gebaut werden. Da aber im stationären Waagrechtflug Auftrieb und Gewicht gleich groß sind, heißt das, daß auch der Gesamtauftrieb A in (3) kleiner wird.

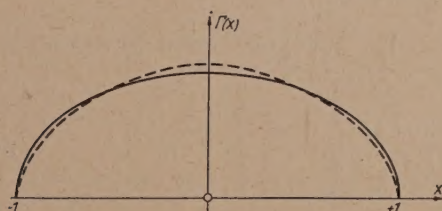


Bild 1

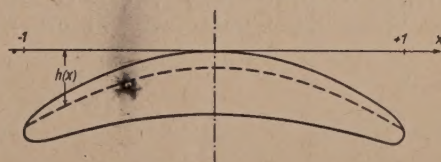


Bild 2

Ersetzt man $\Gamma(x)$ durch $\lambda \cdot \Gamma(x)$, so ändern sich Auftrieb (3) und Holmbiegemoment (5) proportional zu λ , während der induzierte Widerstand proportional zu λ^2 ist. Man wird also mit einer Auftriebsverteilung, die an den Flügelen etwas kleinere Werte als die elliptische Verteilung mit gleichem Auftrieb besitzt, etwas günstigere Widerstandsverhältnisse erwarten dürfen, als mit der elliptischen Auftriebsverteilung. — Allerdings muß bemerkt werden, daß die Abhängigkeit des Fluggewichts vom Holmbiegemoment bei den üblichen Tragflügelbauweisen sehr gering ist, so daß der oben beschriebene Effekt klein ist.

Diese Überlegung führt auf die folgende Aufgabenstellung: Es soll der induzierte Widerstand (2) zum Minimum gemacht werden unter den beiden Nebenbedingungen, daß Auftrieb (3) und Holmbiegemoment (5) vorgeschriebene Werte besitzen.

c) Betrachtet man einen in Flugrichtung gekrümmten Tragflügel (vgl. Bild 2), so wäre für diesen bei der Lösung der dritten Grundaufgabe der Tragflügeltheorie ⁴⁾ außer dem Gesamtauftrieb auch noch das Längsmoment konstant zu halten. Man kann nun verlangen, daß die Erhaltung des Längsmoments ausschließlich durch Auftriebskräfte am Tragflügel erfolgen soll (Längsstabilisierung durch Tragflügelverwindung, wie etwa im Vogelflug). Sei etwa $h(x)$ der Abstand der Druckmittelpunktslinie (in Bild 2 gestrichelt) von der x -Achse. Dann bedeutet diese Forderung, daß

$$\int_{-1}^1 \Gamma(x) h(x) dx = M \quad \dots \dots \dots (6)$$

(Längsmoment M vorgegeben) sein soll und die obige Aufgabe lautet: Gesucht wird diejenige Auftriebsverteilung $\Gamma(x)$, für die (2) zu einem Minimum wird unter den beiden Nebenbedingungen (3) und (6). — Es mag hier angemerkt werden, daß in dem allgemeinen Falle eines beliebig ge-

⁴⁾ Zwar läßt sich (vgl. ¹⁾, S. 25) das Bild der tragenden Linie auf diesen Fall nicht mehr anwenden, wie jedoch M. Munk (³⁾, S. 21) gezeigt hat, genügt es bei Widerstandsbetrachtungen, nur das ebene Problem eines in Flugrichtung nicht gekrümmten Flügels zu betrachten. $\Gamma(x)$ ist hier also die Projektion des Auftriebs auf eine zur Flugrichtung senkrechte Ebene.

stalteten Tragflügels die Druckmittelpunktslinie nicht die Linie des vorderen Neutralpunkts im ebenen Problem ($T/4$ -Linie) sein wird. Die Aufgabe, zu einer beliebig vorgegebenen Tragfläche diese Linie zu bestimmen, bereitet große Schwierigkeiten, die m. W. bis heute noch nicht gelöst sind. Näherungsweise kann man jedoch die Druckmittelpunktslinie durch die $T/4$ -Linie ersetzen, solange nur der Flügel nicht zu sehr von einem geraden Tragflügel abweicht.

Es liegt nun nahe, auf Grund dieser Beispiele das oben formulierte Minimumproblem so zu erweitern, daß endlich viele, in $\Gamma(x)$ lineare Nebenbedingungen vorgeschrieben werden. Man sucht also $\Gamma(x)$ im Intervall $\langle -1, +1 \rangle$ so zu bestimmen, daß

$$\int_{-1}^1 \Gamma(x) w(x) dx \quad \dots \dots \dots (2)$$

zum Minimum wird unter den N Nebenbedingungen

$$\int_{-1}^1 \Gamma(x) h_n(x) dx = A_n \quad (n = 1, \dots, N) \quad \dots \dots \dots (7)$$

[$\Gamma(-1) = \Gamma(+1) = 0$; $h_n(x)$ und A_n beliebig vorgegeben, einzig für $h_m(x) \equiv 0$ ist natürlich nur $A_m = 0$ zulässig]. Für $N = 1$, $h_1(x) \equiv 1$, $A_1 = A$ ergibt sich daraus die von L. Prandtl formulierte Aufgabe als Sonderfall, ebenso lassen sich die Beispiele a), b) und c) durch analoge Spezialisierung gewinnen.

2. Umformung des Problems

Zur mathematischen Behandlung des Problems mögen folgende Umformungen vorgenommen werden:

Man setzt

$$\begin{aligned} x &= \cos s, & y &= \cos t, \\ 4 w(x) \sqrt{1-x^2} &= f(s), & \Gamma(x) &= Z(s) \end{aligned}$$

und wendet die Schreibweise $h_n(x) \sqrt{1-x^2} = h_n(s)$ ($n = 1, \dots, N$) an. Damit wird ⁵⁾ aus (1), (2) (unter Vernachlässigung eines Faktors $1/4$) und (7):

$$f(s) = \frac{1}{\pi} \oint_0^\pi \frac{dZ(t)}{dt} \frac{\sin s dt}{\cos t - \cos s} \quad \dots \dots \dots (1a),$$

$$\int_0^\pi Z(s) f(s) ds \quad \dots \dots \dots (2a),$$

$$\int_0^\pi Z(s) h_n(s) ds = A_n \quad (n = 1, \dots, N) \quad \dots \dots \dots (7a).$$

Bei bekanntem $f(s)$ ist (1a) eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art für $\frac{dZ(t)}{dt}$. Ihre Lösung ist bekanntlich ⁶⁾

$$\frac{dZ(s)}{ds} = \frac{1}{\pi} \oint_0^\pi f(t) \frac{\sin t dt}{\cos s - \cos t},$$

woraus durch Integration

$$Z(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \log \frac{\sin \frac{s+t}{2}}{\sin \frac{s-t}{2}} dt \quad \dots \dots \dots (8)$$

folgt. Schreibt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{\pi} \log \frac{\sin \frac{s+t}{2}}{\sin \frac{s-t}{2}} = S(s, t),$$

⁵⁾ Die Voraussetzungen, unter denen die vorkommenden Integrale und unendlichen Reihen existieren und unter denen die verwendeten Umformungen (Vertauschung der Integrationsreihenfolge, Vertauschung von Integration und Summation) erlaubt sind, werden in einer ausführlicheren Arbeit betrachtet, die demnächst unter dem Titel „Lösung eines speziellen Minimumproblems“ in der Mathematischen Zeitschrift erscheinen soll. Außerdem wird darin noch eine zweite Klasse von Nebenbedingungen zu den betrachteten hinzugenommen. Zusatz bei der Korrektur: Ist inzwischen erschienen in der Math. Zeitschrift, Bd. 53 (1950) S. 21–52.

⁶⁾ Vgl. etwa K. Schröder: Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften XXX (1938).

und setzt (8) in (2a) und (7a) ein, so erhält man

$$\int_0^\pi \int_0^\pi f(s) f(t) S(s, t) ds dt \dots \dots \dots (2b)$$

und

$$\int_0^\pi \int_0^\pi f(s) h_n(t) S(s, t) ds dt = A_n \quad (n = 1, \dots, N) \dots \dots (7b).$$

Da durch (1a) und (8) die Funktionen $Z(s)$ und $f(s)$ einander eindeutig zugeordnet sind, kann man auch $f(s)$ als gesucht ansehen. Damit lautet die zu lösende Aufgabe: Es soll $f(s)$ im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ so bestimmt werden, daß (2b) unter den Nebenbedingungen (7b) zum Minimum wird.

Zur weiteren Vereinfachung der Schreibweise werde noch folgende Abkürzung eingeführt:

$$(f, g) = \int_0^\pi \int_0^\pi f(s) g(t) S(s, t) ds dt \dots \dots \dots (9).$$

Mit der für $0 \leq s, t \leq \pi$, $s \neq t$ gültigen Darstellung⁷⁾

$$S(s, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin ns \sin nt$$

ergibt sich aus (9):

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_0^\pi \int_0^\pi f(s) g(t) S(s, t) ds dt \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\int_0^\pi f(s) \sin ns ds \right) \left(\int_0^\pi g(t) \sin nt dt \right), \end{aligned}$$

oder

$$(f, g) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n b_n \dots \dots \dots (10)$$

mit den Fouriersinuskoeffizienten

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(s) \sin ns ds, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(t) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Nach (9) und (10), und wegen $S(s, t) = S(t, s)$ besitzt (f, g) die folgenden Eigenschaften:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad & (af, g) = a(f, g) \quad (a = \text{reelle Zahl}) \\ b) \quad & (f, g) = (g, f) \\ c) \quad & (f + g, h) = (f, h) + (g, h) \\ d) \quad & (f, f) > 0 \quad \text{für} \quad f(s) \equiv 0^+ \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11).$$

Man hat also die Aufgabe, eine Funktion $f(s)$ im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ so zu finden, daß $(f, f) = \text{Min.}$

wird unter den N Nebenbedingungen

$$(f, h_n) = A_n \quad (n = 1, \dots, N) \dots \dots \dots (12).$$

Dabei ist (f, g) durch (9) erklärt und hat die Eigenschaften (11).

3. Lösung des Problems

Wenn die Funktionen $h_n(s)$ linear abhängig sind, so gibt es unter den Nebenbedingungen (12) entweder überzählige, oder sie sind unter sich widerspruchsvoll, lassen sich also überhaupt nicht erfüllen. Man darf also, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, die Funktionen $h_n(s)$ als linear unabhängig voraussetzen.

Voraussetzung: Die Funktionen $h_n(s)$ seien linear unabhängig, die reellen Zahlen A_n ($n = 1, \dots, N$) seien beliebig gewählt.

Behauptung: Dann gibt es genau eine Lösung $f'(s)$ des obigen Minimumproblems und diese Lösung besitzt die Gestalt

$$f'(s) = \sum_{n=1}^N a_n h_n(s)$$

mit eindeutig bestimmten reellen Zahlen a_n .

⁷⁾ Vgl. etwa G. Hamel, Integralgleichungen S. 120. Berlin 1937 bei J. Springer; sowie K. Jaekel, Ermittlung einer Reihendarstellung des Kernes $\ln r$ in elliptischen Koordinaten. Z. angew. Math. Mech., Bd. 30 (1950), Seite 186 Formel (16).

Beweis: Nach dem Orthonormalisierungsverfahren von E. Schmidt kann man Funktionen

$$H_n(s) = \sum_{m=1}^n c_{mn} h_m(s) \quad (c_{nn} \neq 0; n = 1, \dots, N)$$

so finden daß

$$(H_m, H_n) = e_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

ist. Als Umkehrung dieser Gleichungen ergibt sich eine Darstellung

$$h_n(s) = \sum_{m=1}^n d_{mn} H_m(s) \quad (d_{nn} \neq 0; n = 1, \dots, N).$$

Man setzt nun

$$f'(s) = \sum_{n=1}^N c_n H_n(s)$$

mit vorläufig noch unbestimmten reellen Koeffizienten c_n und erhält mit den Rechenregeln (11)

$$\begin{aligned} (f', h_r) &= \sum_{n=1}^N c_n (H_n, h_r) = \sum_{n=1}^N c_n \sum_{m=1}^r d_{mr} (H_n, H_m) \\ &= \sum_{n=1}^N c_n \sum_{m=1}^r d_{mr} e_{nm} = \sum_{n=1}^r c_n d_{nr} \quad \text{für } r = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Soll nun $\sum_{n=1}^r c_n d_{nr} = A_r$ ($r = 1, \dots, N$) sein, so sind dadurch die c_n rekurrent eindeutig bestimmt. Mit den so gewählten reellen Zahlen c_n erfüllt dann f' die Nebenbedingungen (12), weiter erhält $f'(s)$ die behauptete Gestalt

$$f'(s) = \sum_{m=1}^N c_m H_m(s) = \sum_{m=1}^N c_m \sum_{n=1}^m c_{nm} h_n(s) = \sum_{n=1}^N h_n(s) \sum_{m=n}^N c_m c_{nm} = \sum_{n=1}^N a_n h_n(s).$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß f' auch (f, f) zum Minimum macht. Nun läßt sich eine beliebige Funktion $f(s)$ immer in der Gestalt

$$f(s) = f'(s) + k(s) \quad (\text{nämlich mit } k(s) = f(s) - f'(s))$$

schreiben. Damit ist

$$(f, h_n) = (f' + k, h_n) = (f', h_n) + (k, h_n) = A_n + (k, h_n) \quad (n = 1, \dots, N).$$

$f(s)$ erfüllt also die Nebenbedingungen (12) genau dann, wenn

$$(k, h_n) = 0 \quad \text{ist für } n = 1, \dots, N.$$

Für die Gesamtheit der Funktionen $f(s)$, die die Nebenbedingungen (12) erfüllen, gilt also nach den Regeln (11):

$$\begin{aligned} (f, f) &= (f' + k, f' + k) = (f', f') + 2(f', k) + (k, k) \\ &= (f', f') + 2 \sum_{n=1}^N a_n (h_n, k) + (k, k) \\ &= (f', f') + (k, k) \geq (f', f'), \end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $k(s) \equiv 0$ eintritt. Die Eindeutigkeit der Koeffizienten a_n folgt mit (11d) aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $h_n(s)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Macht man die oben eingeführten Transformationen wieder rückgängig, so findet man folgendes Ergebnis:

4. Ergebnis

Es seien die Funktionen $h_n(x)$ und die reellen Zahlen A_n ($n = 1, \dots, N$) beliebig gewählt. Die Funktion $\Gamma(x)$ soll in $-1 \leq x \leq +1$ so bestimmt werden, daß $\Gamma(-1) = \Gamma(+1) = 0$ ist und daß unter der Setzung

$$w(x) = \frac{1}{4\pi} \oint_{-1}^1 \frac{d\Gamma(y)}{dy} \frac{dy}{x-y} \dots \dots \dots (1)$$

der Ausdruck

$$\int_{-1}^1 \Gamma(x) w(x) dx \dots \dots \dots (2)$$

zu einem Minimum wird unter den Nebenbedingungen

$$\int_{-1}^1 \Gamma(x) h_n(x) dx = A_n \quad (n = 1, \dots, N) \dots \dots \dots (7).$$

Wenn es überhaupt eine Funktion $\Gamma(x)$ gibt, die den N Nebenbedingungen (7) genügt, dann hat dieses Minimumproblem genau eine Lösung, und diese besitzt die Gestalt:

$$\Gamma(x) = \sum_{n=1}^N a_n \int_{-1}^1 h_n(y) \log \left| \frac{1 - xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{x-y} \right| dy.$$

mit reellen Koeffizienten a_n . Sind die Funktionen $h_n(x)$ linear unabhängig, so hat das Minimumproblem immer eine Lösung und die Koeffizienten a_n sind eindeutig bestimmt.

5. Anwendung

In der folgenden Tabelle stehen zu einigen einfachen Funktionen $h(x)$ die zugehörigen

Funktionen	$\int_1^1 h(y) \log \left \frac{1 - xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{x-y} \right dy.$
$h(x)$	$\int_{-1}^{+1} h(y) \log \left \frac{1 - xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{x-y} \right dy$
1	$\pi \sqrt{1-x^2}$
x	$\frac{\pi}{2} x \sqrt{1-x^2}$
x^2	$\frac{\pi}{6} (2x^2 + 1) \sqrt{1-x^2}$
x^3	$\frac{\pi}{8} x (2x^2 + 1) \sqrt{1-x^2}$
$\begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$	$2x \log \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{ x }$
$ x $	$x^2 \log \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{ x } + \sqrt{1-x^2}$
$x x $	$\frac{2}{3} \left(x^3 \log \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{ x } + x \sqrt{1-x^2} \right)$
$x^2 x $	$\frac{1}{12} \left(6x^4 \log \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{ x } + (6x^2 + 1) \sqrt{1-x^2} \right)$
$\begin{cases} 1 & x_0 < x \leq 1 \\ 0 & -1 \leq x < x_0 \end{cases}$	$(x_0 - x) \log \left \frac{1 - x_0 x + \sqrt{(1-x_0^2)(1-x^2)}}{x_0 - x} \right + \sqrt{1-x^2} \arccos x_0$

Damit findet man für die ersten beiden der eingangs angegebenen Beispiele die Lösungen:

Beispiel	Nebenbedingungen	Lösung
a)	$\int_{-1}^1 \Gamma(x) x dx = R$	$\Gamma(x) = \frac{8R}{\pi} x \sqrt{1-x^2}$
b)	$\begin{cases} \int_{-1}^1 \Gamma(x) dx = A \\ \int_{-1}^1 \Gamma(x) x dx = H \end{cases}$	$\Gamma(x) = 3 \left(\frac{2A}{\pi} - H \right) \sqrt{1-x^2} + 3 \left(3H - \frac{4A}{\pi} \right) x^2 \log \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{ x }$

In dem Bild 3 ist diese Lösung des Beispiels a) aufgetragen. Bild 4 zeigt einige Kurven aus der Schar der Lösungen von Beispiel b) für $A = \text{const}$, H variabel (unter diesen ist für $3\pi H = 4A$ die Halbellipse als Sonderfall enthalten).

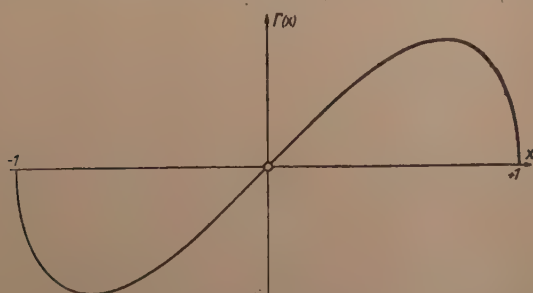


Bild 3 zu Beispiel a)

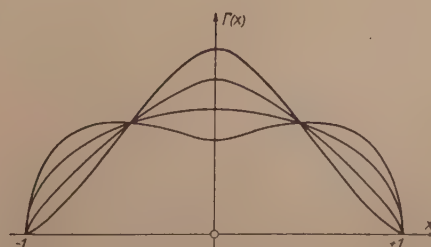


Bild 4 zu Beispiel b)

Eingegangen am 28. Januar 1950.

Einige exakte Lösungen für die Temperaturverteilung in einer laminaren Strömung

Von H. Schlichting in Braunschweig

Für die ebene Kanalströmung und für die Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern werden exakte Lösungen für die Temperaturverteilung mit Berücksichtigung der Reibungswärme angegeben.

For the plane canal flow and the flow between two concentric rotating cylinders, the distribution of temperature is given with regard to the frictional heat.

Pour l'écoulement plan dans un canal et pour l'écoulement entre deux cylindres concentriques rotatives on donne la distribution exacte de la température en considération de la chaleur de friction.

Дается Точное решение задачи о распределении температуры с учетом теплоты трения в случае плоского течения жидкости в канале или течения жидкости между двумя концентричными вращающимися цилиндрами.

I. Einleitung

Für die Fragen des konvektiven Wärmeüberganges zwischen einem festen Körper und einer strömenden Flüssigkeit (oder einem Gas) spielt die Temperaturverteilung in der Umgebung des umströmten Körpers eine grundlegende Rolle. Die genaue Ermittlung dieser Temperaturverteilung ist im wesentlichen ein Strömungsproblem. Bei einigermaßen großen Strömungsgeschwindigkeiten hat das Temperaturfeld „Grenzschichtcharakter“, d. h. es vollzieht sich der Temperaturausgleich zwischen der Flüssigkeit und dem umströmten Körper in einer sehr dünnen Schicht, der sog. „Temperaturgrenzschicht“, deren Dicke sehr klein ist gegen die Abmessungen des Körpers. Bei Gasen ist die Dicke der Temperaturgrenzschicht von etwa gleicher Größe wie die Dicke der Strömungsgrenzschicht, während bei Flüssigkeiten die Dicke der Temperaturgrenzschicht u. U. erheblich geringer ist als diejenige der Strömungsgrenzschicht.

Für die Temperaturverteilung in der Umgebung eines geheizten umströmten Körpers sind in den letzten Jahren verschiedene Näherungslösungen auf der Grundlage der Grenzschichttheorie angegeben worden^{1 4)}. Die Zahl der bekannten exakten Lösungen ist jedoch sehr gering. Sie beschränken sich im wesentlichen auf die laminare Kanal- und Rohrströmung⁵⁾, und hierbei auf solche Fälle, wo die in der Strömung durch Reibung erzeugte Wärme vernachlässigt wird, was nur für mäßige Strömungsgeschwindigkeiten zulässig ist. Im folgenden sollen einige exakte Lösungen für die Temperaturverteilung in laminarer Strömung mit Berücksichtigung der durch Reibung erzeugten Wärme angegeben werden. Diese Lösungen haben einmal eine gewisse grundsätzliche Bedeutung, da sie exakte Lösungen der Strömungsgleichungen und der Gleichung für die Temperaturverteilung darstellen. Andererseits haben einige davon auch eine unmittelbare praktische Bedeutung für die Theorie der hydrodynamischen Lagerreibung. Trotz ihrer sehr großen Einfachheit scheinen die meisten dieser Lösungen für die Temperaturverteilung bisher noch nicht bekannt zu sein.

II. Die Grundgleichungen

Die Strömungsgleichungen (Navier-Stokessche Gleichungen) und die Gleichungen für die Temperaturverteilung (Energiegleichung) lauten für ein inkompressibles Medium mit temperaturunabhängigen Stoffbeiwerten für den ebenen Fall in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots \quad (1),$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \dots \quad (2),$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad \dots \quad (3),$$

$$\rho g c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi \quad \dots \quad (4).$$

¹⁾ E. Eckert: Die Berechnung des Wärmeüberganges in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper. VDI-Forsch.-Heft 416 (1942).

²⁾ E. Eckert und O. Drewitz: Der Wärmeübergang an eine mit großer Geschwindigkeit längsangeströmten Platte. Forschung a. d. Gebiet d. Ingenieurwesens, Bd. 11 (1940), S. 116.

³⁾ E. Eckert: Wärme- und Stoffaustausch. Berlin: Springer 1949.

⁴⁾ J. Ginzl: Ein Pohlhausen-Verfahren zur Berechnung laminarer kompressibler Grenzschichten an einer geheizten Wand. Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 321.

⁵⁾ M. Jacobs: Allgemeine Grundlagen der Wärmeübertragung. Der Chemie-Ingenieur Bd. I, Leipzig 1933.

Dabei bedeuten u, v die Geschwindigkeitskomponenten, T die Temperatur, p den Druck, ρ die Dichte, μ [kg s/m²] die Zähigkeit, g die Erdschwere, c_p [m/grad] die spezifische Wärme bezogen auf die Gewichtseinheit, λ [kg/s grad] die Wärmeleitfähigkeit und Φ die Dissipationsfunktion, welche gegeben ist durch

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \dots \dots \dots (5).$$

In der Gl. (4) für die Temperaturverteilung bedeutet die linke Seite die Wärmezufuhr pro Volumeneinheit und Zeiteinheit durch Konvektion, die ersten beiden Glieder der rechten Seite die Wärmezufuhr durch Leitung und das letzte Glied die durch Reibung erzeugte Wärme. Der Wärmeübergang zwischen der Flüssigkeit und den Wänden ist gegeben durch den Wärmestrom q (= Wärmemenge pro Zeiteinheit und Flächeneinheit). Es gilt

$$q = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \dots \dots \dots (6),$$

wo $\partial T/\partial n$ den Temperaturgradienten an der Wand bedeutet. Dabei ist $q > 0$ für einen Wärmeübergang von Flüssigkeit auf Wand, wenn die Normale n positiv gerechnet wird in Richtung Wand \rightarrow Flüssigkeit.

III. Couette-Strömung

Eine erste exakte Lösung für das obige Gleichungssystem läßt sich angeben für die Couetteströmung zwischen zwei parallelen ebenen Wänden (Wandabstand h), von denen die eine in Ruhe ist und die andere sich mit der konstanten Geschwindigkeit U bewegt. Die Randbedingungen sind somit für die Geschwindigkeit

$$y = 0: u = v = 0 \quad \text{und} \quad y = h: u = U; \quad v = 0.$$

Die Randbedingungen für die Temperatur sind, daß entweder die Temperatur beider Wände vorgeschrieben ist (Wärmeübergang an beiden Wänden)

$$y = 0: T = T_1; \quad y = h: T = T_2 \dots \dots \dots (7a),$$

oder daß nur an einer Wand die Temperatur vorgeschrieben ist, während an der anderen Wand verlangt wird, daß kein Wärmeübergang stattfindet. In diesem Fall findet dann eine Aufheizung der letzteren durch die Reibungswärme statt (Thermometerproblem):

$$y = 0: \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad y = h: T = T_2 \dots \dots \dots (7b).$$

Die Lösung der Strömungsgleichungen, welche die Randbedingungen erfüllt, lautet:

$$u = U \frac{y}{h}; \quad v = 0; \quad p = p_0 = \text{const} \dots \dots \dots (8).$$

Eine von x unabhängige Lösung für die Temperaturverteilung erhält man dann nach (4) aus

$$\lambda \frac{d^2 T}{dy^2} = -\mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

oder mit Gl. (8):

$$\lambda \frac{d^2 T}{dy^2} = -\mu \frac{U^2}{h^2} \dots \dots \dots (9).$$

Die Lösung von Gl. (9), welche den Randbedingungen (7a) genügt, lautet

$$T(y) - T_1 = (T_2 - T_1) \frac{y}{h} + \frac{\mu U^2}{2\lambda} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \dots \dots \dots (10).$$

Hiernach überlagert sich der linearen Temperaturverteilung in der ruhenden Flüssigkeit eine parabolische Verteilung, die von der Reibungswärme herrührt. Die Temperaturverteilung für verschiedene Werte der Dimensionslosen $\Theta = \frac{\mu U^2}{\lambda (T_2 - T_1)}$ ist in Bild 1 dargestellt.

Wärmeübergang: Für den Fall, daß beide Wände wärmedurchlässig sind, erhält man aus (6) und (10) für den Wärmestrom

$$\text{an der unteren Wand } (u = 0): \quad q_1 = \lambda \frac{T_2 - T_1}{h} + \frac{\mu U^2}{2h} \dots \dots \dots (11a),$$

$$\text{an der oberen Wand } (u = U): \quad q_2 = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{h} + \frac{\mu U^2}{2h} \dots \dots \dots (11b).$$

Der gesamte Wärmestrom an beiden Wänden, $q = q_1 + q_2$, der im Falle der Ruhe (oder bei Vernachlässigung der Reibungswärme) verschwindet, ist im allgemeinen Fall:

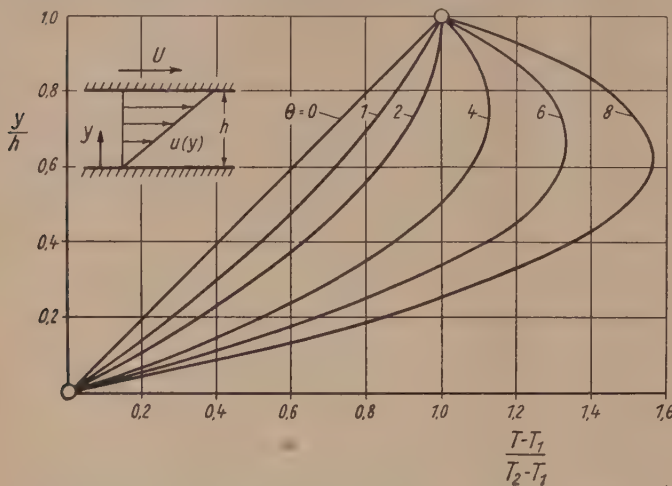


Bild 1. Temperaturverteilung bei der Couetteströmung mit Berücksichtigung der Reibungswärme, $\theta = \mu U^2 / \lambda (T_2 - T_1)$.

$$q = \frac{\mu U^2}{h},$$

also unabhängig von der Temperaturdifferenz der Wände. Bemerkenswert ist, daß bei vorgegebener Temperaturdifferenz der beiden Wände, $T_2 - T_1 > 0$, ein Wärmeübergang von der wärmeren Wand auf die Flüssigkeit ($q_2 < 0$) nur eintritt, solange die Geschwindigkeit der wärmeren Wand unterhalb einer bestimmten Grenze bleibt. Man erhält Kühlung der wärmeren Wand ($q_2 < 0$) bzw. Aufheizung der wärmeren Wand ($q_2 > 0$), je nachdem ob $\frac{\mu U^2}{2\lambda} \leq (T_2 - T_1)$.

Im Falle, daß beide Wände gleiche Temperatur haben ($T_2 = T_1$), erhält man infolge der Reibungswärme eine parabolische Temperaturverteilung über die Spaltbreite mit der maximalen Temperaturerhöhung in der Mitte vom Betrage

$$T_m - T_1 = \frac{U^2 \mu}{8 \lambda} \quad (12).$$

Bemerkenswert ist, daß diese Temperaturerhöhung infolge der Reibungswärme unabhängig ist von der Spaltbreite h).

Für die Randbedingungen (7b) (Thermometerproblem) erhält man aus (9) die Lösung

$$T(y) - T_2 = \frac{\mu U^2}{2\lambda} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \quad (13)$$

und hieraus für die Aufheiztemperatur der unteren Wand

$$T_e - T_2 = \frac{\mu U^2}{2\lambda} \quad (14).$$

Diese Aufheizung (Eigentemperatur) beträgt also das Vierfache der maximalen Temperaturerhöhung in der Spaltmitte für den Fall, wo beide Wände auf gleicher Temperatur gehalten werden.

Die Temperaturverteilung nach Gl. (10) und Bild 1 ist von Bedeutung bei der Strömung im Schmier-spalt zwischen Zapfen und Lager. Diese ist bei den kleinen Abmessungen des Schmier-spaltes und der großen Zähigkeit des Schmieröles laminar. Die Aufheizung des Schmieröles durch die Reibungswärme ist hier auch schon bei mäßigen Geschwindigkeiten beträchtlich, wie das folgende Zahlenbeispiel lehrt:

Ölzähigkeit (bei etwa 30° C): $\mu = 0,040 \text{ kg s/m}^2$,

Wärmeleitzahl: $\lambda = 0,02 \text{ kg/s grd.}$

Hiermit ergibt sich aus Gl. (12) für $U = 5 \text{ m/s}$ eine Temperaturerhöhung von $T_m - T_1 = 6^\circ$, und für $U = 10 \text{ m/s}$, $T_m - T_1 = 25^\circ$. Diese Temperaturerhöhung des Öles ist so beträchtlich, daß sie bei der starken Temperaturabhängigkeit des Zähigkeitsbeiwertes für die Tragfähigkeit des Lagers wesentlich wird.

IV. Kanalströmung

Eine zweite recht einfache exakte Lösung für die Temperaturverteilung erhält man aus Gl. (1) bis (4) für die Poiseuillesche Kanalströmung. Mit den Bezeichnungen nach Bild 2 ist die Geschwindigkeitsverteilung

$$u(y) = u_n \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right).$$

⁶⁾ Dieser Sonderfall ist bereits von G. Vogelpohl [VDI-Forsch.-Heft 425 (1949)] behandelt worden. Darüber hinaus gibt Vogelpohl die Lösung für die Temperaturverteilung im „Einlauf“, d. h. für diejenige Spaltströmung, bei der im Eintrittsquerschnitt eine über die Spaltweite konstante Temperaturverteilung vorhanden ist, die weiter stromabwärts allmählich in diese parabolische Verteilung übergeht.

Dabei ist die Maximalgeschwindigkeit in der Kanalmitte u_m gegeben durch den Druckgradienten längs der Kanalachse, $u_m = -\left(\frac{dp}{dx}\right) \frac{h^2}{2\mu}$. Hiermit ergibt sich für die Temperaturverteilung aus (4) und (5) eine nur von y abhängige Lösung aus

$$\lambda \frac{d^2 T}{dy^2} = -\frac{4\mu u_m^2}{h^4} y^2 \dots \dots \dots (15).$$

Wärmeübergang an beiden Wänden: Schreibt man für die Temperatur als Randbedingung vor $T = T_1$ bei $y = -h$ und $T = T_2$ bei $y = +h$, so ergibt sich aus (15):

$$T(y) = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) - \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \frac{y}{h} + \frac{1}{3} \frac{\mu u_m^2}{\lambda} \left(1 - \frac{y^4}{h^4}\right) \dots \dots \dots (16).$$

Das letzte Glied stellt die Temperaturverteilung infolge der Reibungswärme dar.

Für den Wärmestrom erhält man aus (6) und (16): an der unteren Wand ($T = T_1$):

$$q_1 = \lambda \frac{T_2 - T_1}{2h} + \frac{4}{3} \frac{\mu u_m^2}{h}$$

und an der oberen Wand ($T = T_2$):

$$q_2 = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{2h} + \frac{4}{3} \frac{\mu u_m^2}{h}$$

Der gesamte Wärmestrom (an beiden Wänden) ist

$$q = q_1 + q_2 = \frac{8}{3} \mu \frac{u_m^2}{h}.$$

Die Umkehr des Wärmeüberganges an der wärmeren Wand ($q_2 = 0$) tritt in diesem Fall ein für

$$\frac{8}{3} \mu \frac{u_m^2}{\lambda} = T_2 - T_1.$$

Für den Sonderfall, daß beide Wände auf gleicher Temperatur gehalten werden, $T_1 = T_2 = T_0$, ergibt sich eine Temperaturverteilung nach einer einfachen Parabel 4. Grades, die in Bild 2 als Kurve *a* dargestellt ist. Die maximale Temperaturerhöhung in der Kanalmitte ist in diesem Fall

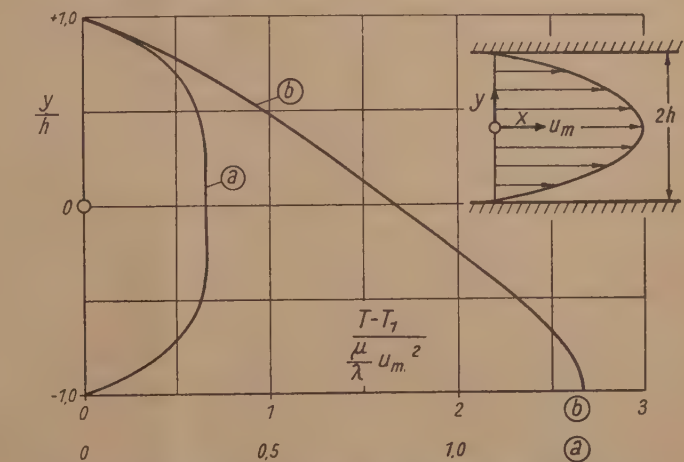


Bild 2. Temperaturverteilung bei der Poiseuilleschen Kanalströmung
a beide Wände haben gleiche Temperatur; Wärmeübergang an beiden Wänden,
b untere Wand wärmeundurchlässig, Wärmeübergang nur an der oberen Wand (Thermometerproblem)

$$T_m - T_0 = \frac{1}{3} \frac{\mu}{\lambda} u_m^2.$$

Auch hier ist die maximale Temperaturerhöhung unabhängig von der Kanalbreite.⁷⁾

Thermometerproblem: Wird Wärmeübergang nur an einer Wand zugelassen, dagegen die andere als wärmeundurchlässig angesehen, so lauten die Randbedingungen für die Temperatur:

$T = T_1$ bei $y = +h$ und $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ bei $y = -h$. Die Lösung für diesen Fall lautet:

$$T(y) - T_1 = \frac{1}{3} \frac{\mu}{\lambda} u_m^2 \left(5 - 4 \frac{y}{h} - \frac{y^4}{h^4}\right) \dots \dots \dots (17).$$

Sie ist in Bild 2 als Kurve *b* dargestellt. Die Eigentemperatur der wärmeundurchlässigen Wand ist somit

$$T_c - T_1 = \frac{8}{3} \frac{\mu}{\lambda} u_m^2.$$

In diesem Fall beträgt also die Aufheizung der wärmeundurchlässigen Wand das Achtfache der maximalen Temperaturerhöhung in der Kanalmitte für den Fall, daß beide Wände auf gleicher Temperatur gehalten werden.

⁷⁾ Zusatz bei der Korrektur (Sept. 1950): Eine Erweiterung der Lösung für die Poiseuillesche Kanalströmung für eine mit der Temperatur veränderliche Zähigkeit ist inzwischen von H. Hausenblas, Ing.-Archiv, Bd. 18, S. 151—166, angegeben worden.

V. Konzentrische rotierende Zylinder

Eine dritte exakte Lösung läßt sich angeben für die Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern, die mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit umlaufen. Die Gleichungen mögen in ebenen Polarkoordinaten r, φ angegeben werden ($u \equiv$ Geschwindigkeitskomponente in der Umfangsrichtung). Da in diesem Falle alle Größen von φ unabhängig sind, reduzieren sich die Strömungsgleichungen auf

$$\rho \frac{u^2}{r} = \frac{dp}{dr}; \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (18; 19).$$

Die Gleichung für die Temperaturverteilung $T(r)$ lautet, da die konvektiven Glieder wieder fortfallen,

$$0 = \lambda \left(\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \right) + \mu \Phi \quad \dots \dots \dots (20)$$

mit der Dissipationsfunktion

$$\Phi = \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right)^2 \quad \dots \dots \dots (21).$$

Seien r_1, r_2 die Radien des inneren bzw. äußeren Zylinders und ω_1, ω_2 die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten, so lautet die Lösung für die Geschwindigkeitsverteilung

$$u(r) = a \cdot r + \frac{b}{r} \quad \dots \dots \dots (22)$$

mit

$$a = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad b = \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \dots \dots \dots (23).$$

Aus Gl. (20) ergibt sich als Lösung für die Temperaturverteilung ohne Berücksichtigung der Reibungswärme mit den Randbedingungen $T = T_1$ für $r = r_1$ und $T = T_2$ für $r = r_2$:

$$T(r) - T_1 = (T_2 - T_1) \frac{\ln \left(\frac{r}{r_1} \right)}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \quad \dots \dots \dots (24).$$

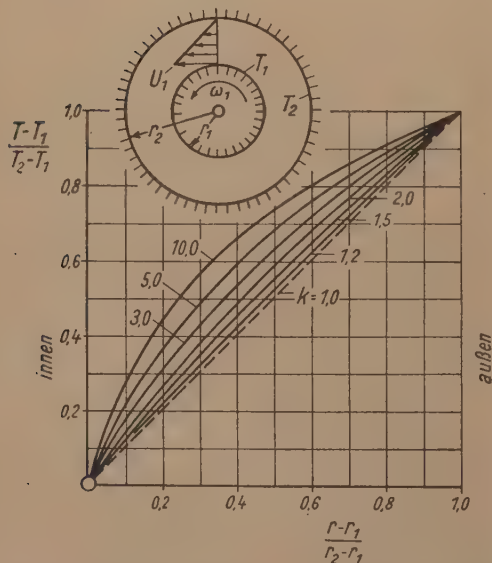


Bild 3. Temperaturverteilung in der Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern, ohne Reibungswärme. $k = \frac{r_2}{r_1}$

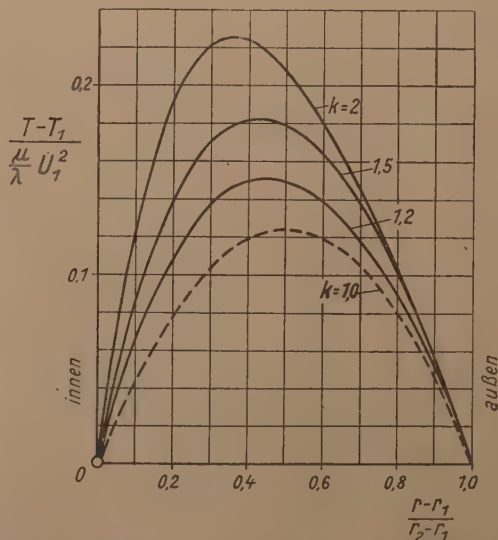


Bild 4. Temperaturverteilung in der Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern, mit Berücksichtigung der Reibungswärme. Beide Zylinder haben gleiche Temperatur

Diese Temperaturverteilung ist in Bild 3 dargestellt: Für sehr kleine Spaltweiten $\frac{h}{r_1} = \frac{(r_2 - r_1)}{r_1}$, d. h. für $k = \frac{r_2}{r_1} \rightarrow 1$, geht Gl. (24) in die lineare Temperaturverteilung der Couetteströmung, Gl. (10), über.

Mit Berücksichtigung der Reibungswärme ist nach (20), (21), (22) die Gleichung

$$\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\mu}{\lambda} \Phi(r) = -4 \frac{\mu}{\lambda} \frac{b^2}{r^4} \dots \dots \dots (25)$$

zu lösen. Für die Randbedingungen $T = T_1$ bei $r = r_1$ und $r = r_2$ ergibt sich

$$T - T_1 = \frac{\mu}{\lambda} b^2 \left\{ \left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right] \frac{\ln \left(\frac{r}{r_1} \right)}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} + \left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right] \right\} \dots \dots \dots (26).$$

Mit $U_1 = (\omega_1 - \omega_2) r_2$ sowie $k = \frac{r_2}{r_1}$ und $\eta = \frac{r}{r_1}$ läßt sich Gl. (26) in der dimensionslosen Form schreiben

$$\frac{T - T_1}{\frac{\mu}{\lambda} U_1^2} = \frac{1}{\left[1 - \frac{1}{k^2} \right]^2} \left\{ \left[\frac{1}{k^2} - 1 \right] \frac{\ln \eta}{\ln k} + \left(1 - \frac{1}{\eta^2} \right) \right\} \dots \dots \dots (26a).$$

Die hiernach berechnete Temperaturverteilung ist in Bild 4 für verschiedene $k = \frac{r_2}{r_1}$ dargestellt. Im Grenzfall $\frac{(r_2 - r_1)}{r_1} \rightarrow 0$, d. i. $k \rightarrow 1$, erhält man natürlich wieder die parabolische Temperaturverteilung der Couetteströmung nach Gl. (10), wenn man dort $T_2 = T_1$ setzt. Die allgemeine Lösung mit Berücksichtigung der Reibungswärme, aber mit verschiedenen Wandtemperaturen am inneren und äußeren Zylinder, erhält man durch Überlagerung der Lösungen (24) und (26).

In ähnlicher Weise wie bei der Couetteströmung und bei der ebenen Kanalströmung läßt sich auch hier leicht die Lösung angeben für den Fall, daß ein Wärmeübergang nur auf dem einen der beiden Zylinder stattfindet. Auch lassen sich in jedem Fall die Ausdrücke für den Wärmestrom auf Grund der angegebenen Formeln sofort aufschreiben.

Eingegangen am 21. Februar 1950.

Die mathematischen Grundlagen zu einer Meßmethode des Schubmoduls zäher Flüssigkeiten

Von Erich Pieruschka in Kassel¹⁾

Der Schubmodul zäher Flüssigkeiten kann mittels eines Schwingmeßgeräts bestimmt werden. Es werden hierzu eine Phasenverschiebungs- und eine Amplitudenmethode entwickelt. Weiter werden Versuche ausgewertet, die mit diesem Gerät an der Technischen Hochschule Danzig 1942 gemacht wurden. Dabei zeigt sich, daß es Flüssigkeiten gibt, die dem Newtonschen Stoffgesetz ($G \rightarrow \infty$) nicht gehorchen.

To measure the modulus of shearing of viscous liquids, an oscillation instrument can be used. A phase difference method and an amplitude method are developed for that purpose. Besides, the author gives an interpretation of experiments, made in 1942 by an instrument of that sort at the Technische Hochschule Danzig. It appears, that some liquids do not obey Newton's law of material ($G \rightarrow \infty$).

Le module de cisaillement d'un fluide visqueux peut être déterminé à l'aide d'un appareil de mesure oscillatoire. A cette fin une méthode d'amplitude et une méthode de décalage de phase sont développées. En outre des expériences sont interprétées, faites avec cet appareil en 1942 à la Technische Hochschule de Danzig. Il en résultait l'existence de fluides désobéissants à la loi de substance de Newton ($G \rightarrow \infty$).

Модуль сдвига вязких жидкостей может быть определен при помощи прибора, основанного на принципе вибрации. С этой целью автором разрабатывается метод сдвига ераз и метод амплитуд. Затем исследуются результаты испытаний, произведенных при помощи этого прибора в Высшем Техническом Училище в Данциге в 1942 году. При этом выясняется, что некоторые жидкости не следуют закону материи Ньютона ($G \rightarrow \infty$).

I. Vorbereitung

1. Problemstellung

Im Festigkeitslaboratorium der Technischen Hochschule Danzig hat Herr Prof. Dr.-Ing. Hans Fromm Messungen zur Bestimmung des Schubmoduls zäher Flüssigkeiten veranlaßt, die von Herrn Dr. Hartung ausgeführt und ausgewertet wurden (beendet wurde diese Arbeit 1942). Die Veröffentlichung dieser Versuche in der Forschung ist durch Kriegseinfluß vernichtet worden. Ebenso sind Versuchsprotokolle und Apparatur nicht mehr da. Nur einzelne Daten und Ergebnisse konnten rekonstruiert werden, über die im wesentlichen H. Fromm²⁾ in seiner Arbeit

¹⁾ Dissertation an der Universität Mainz 1949. Bericht: Prof. Dr.-Ing. H. Fromm, Mitbericht: Prof. Dr. phil. K. Bechert.

²⁾ H. Fromm, Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 43—54.

„Laminare Strömung Newtonscher und Maxwellscher Flüssigkeiten“ berichtet. Hier wird auch auf Unstimmigkeiten hingewiesen, die sich damals nicht erklären ließen und ihre Ursache im Maxwell'schen Stoffgesetz

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta} + \frac{\dot{\tau}}{G} \quad \dots \quad (1),$$

das damals allein vorlag und eventuell auch in der Annäherung mathematischer Ansätze haben konnten. Nun hat Fromm in der oben erwähnten Arbeit das Maxwell'sche Stoffgesetz durch eine Tensordarstellung, bei der auch die Drehung neben der Schiebung berücksichtigt wird, wesentlich verfeinert. Deshalb nahm ich die Anregung von Herrn Prof. Fromm auf, unter Verwendung des neuen Stoffgesetzes die genauen mathematischen Grundlagen zu der Danziger Versuchsanordnung zu schaffen und die Ergebnisse der Hartung'schen Auswertung zu überprüfen.

2. Die Differentialgleichungen des Problems

Die Danziger Apparatur bestand im wesentlichen aus zwei konzentrischen Zylindern, die durch einen schmalen Ringspalt, der zur Aufnahme der Versuchsflüssigkeit diente, getrennt waren. Der eine Zylinder wurde in Schwingungen konstanter Amplitude versetzt, die durch die Elastizität und Zähigkeit der Versuchsflüssigkeit auf den zweiten freischwingenden Schwingzylinder übertragen wurden⁸⁾.

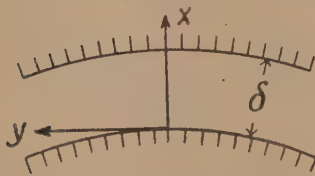


Bild 1

Bild 1 zeigt die Wahl des Koordinatensystems im Ringspalt von der Breite δ . Da diese gegenüber dem Durchmesser des Zylinders klein ist und ebenso die Amplitude des antreibenden Zylinders nicht zu groß ist, kann man mit kartesischen

statt Zylinder-Koordinaten rechnen. Der Weg des antreibenden Zylinders kann durch

$$W = -a \cdot \cos \alpha t \quad \dots \quad (2)$$

dargestellt werden.

Bezeichnet man die Geschwindigkeit in y -Richtung mit v und die Relaxationszeit η/G mit T , so erhält man aus den Gl. (7) der erwähnten Frommschen Arbeit für den Beharrungszustand unseres Problems

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{T} \tau = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot G \left(1 + \frac{\sigma}{G} \right) \quad \dots \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{T} \sigma = -\frac{\partial v}{\partial x} \tau \quad \dots \quad (4).$$

Hier ist $\sigma = \sigma_x = -\sigma_y$ und $\tau = \tau_{xy}$.

Die dynamische Grundgleichung für die Schub- und Trägheitskräfte in y -Richtung ergibt

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad \dots \quad (5),$$

wenn ρ die Dichte der Flüssigkeit sein soll.

Die Randbedingungen für den Beharrungszustand lauten:

$$\tau(0, t) = \mu \frac{\partial v(0, t)}{\partial t} \quad \dots \quad (6),$$

$$v(\delta, t) = a \alpha \sin \alpha t \quad \dots \quad (7).$$

μ ist die Flächenbelegung des freischwingenden Zylinders mit reduzierter Masse. Der antreibende Zylinder soll sich nach (2) bewegen.

Das Randwertproblem partieller Differentialgleichungen (3) bis (7) gibt den Schwingungsvorgang vollständig wieder. Da die Differentialgleichungen zum Teil nichtlinear sind, ist nur eine schrittweise angenäherte Lösung möglich.

Bis zu einer gewissen Größe der Frequenz des antreibenden Zylinders kann σ/G neben 1 vernachlässigt werden, dann braucht man (4) nicht und die Frommschen Gleichungen (3) und (4) gehen in den vereinfachten Ansatz (1) über, wie es auch sein muß. Setzt man noch weiter in (5) $\rho \rightarrow 0$, so nimmt das Randwertproblem die in Danzig behandelte Form an. Man erhält eine

⁸⁾ Eine genaue Beschreibung der Apparatur und des Arbeitens mit ihr findet man bei: W. Hartung, Messung des Schubmoduls zäher Flüssigkeiten. „Technik“ 1951.

gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösung sehr einfach ist. Die erste wohl wesentliche Verbesserung der Hartung'schen Lösung erhält man also, wenn man zwar σ/G vernachlässigt, jedoch ϱ nicht Null setzt. Dieses Problem wird zuerst behandelt.

II. Durchführung für das linearisierte System

3. Lösung der Differentialgleichungen

Bei Vernachlässigung von σ/G neben 1 erhält man aus (3) bis (7) zur Berechnung von τ das lineare Randwertproblem:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{G}{\varrho} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} \quad (8),$$

$$\tau(0, t) = \frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{\partial \tau(0, t)}{\partial x} \quad (9),$$

$$\frac{\partial \tau(\delta, t)}{\partial x} = \varrho a \alpha^2 \cos \alpha t \quad (10).$$

Dieses bedeutet Rechnung mit dem vereinfachten Maxwell'schen Ansatz (1).

Dieses kann mittels des Ansatzes erfüllt werden:

$$\tau = f(x) \cdot \sin \alpha t + g(x) \cdot \cos \alpha t \quad (11).$$

Setzt man (11) in (8) bis (10) ein, so geht dieses Randwertproblem über in

$$f''(x) + \frac{\varrho}{G} \alpha^2 f(x) + \frac{\varrho \alpha}{GT} g(x) = 0 \quad (12),$$

$$g''(x) + \frac{\varrho}{G} \alpha^2 g(x) - \frac{\varrho \alpha}{GT} f(x) = 0 \quad (13)$$

mit den Randbedingungen:

$$g(0) = \frac{\mu}{\varrho} g'(0); \quad f(0) = \frac{\mu}{\varrho} f'(0) \quad (14),$$

$$g'(\delta) = \varrho \cdot a \alpha^2; \quad f'(\delta) = 0 \quad (15).$$

Dieses Randwertproblem kann man nach der Methode der linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen lösen. Man erhält so für $f(x)$ und $g(x)$:

$$f(x) = e^{s_1 x} (A_1^* \sin vx + A_2^* \cos vx) + e^{-s_1 x} (A_3^* \sin vx + A_4^* \cos vx) \quad (16),$$

$$g(x) = e^{s_1 x} (A_2^* \sin vx - A_1^* \cos vx) + e^{-s_1 x} (-A_4^* \sin vx + A_3^* \cos vx) \quad (17),$$

worin

$$s_1 = v_0 \varphi \quad \text{und} \quad v = \frac{v_0}{\varphi} \quad (18)$$

ist mit

$$v_0 = \sqrt{\frac{\varrho \alpha}{2GT}} \quad \text{und} \quad \varphi^2 = \sqrt{1 + \vartheta^2} - \vartheta \quad (19)$$

und

$$\vartheta = \alpha T \quad (20).$$

Die Konstanten A_1^* bis A_4^* ergeben sich aus dem Gleichungssystem:

$$(A_1^* + A_3^*) + (A_2^* - A_4^*) \varphi^2 = \frac{\varrho}{\mu v} (A_2^* + A_4^*) \quad (21),$$

$$(A_2^* - A_4^*) - (A_1^* + A_3^*) \varphi^2 = \frac{\varrho}{\mu v} (A_3^* - A_1^*) \quad (22),$$

$$\left. \begin{aligned} e^{2s_1 \delta} [(A_1^* \varphi^2 - A_2^*) \sin v\delta + (A_2^* \varphi^2 + A_1^*) \cos v\delta] = \\ = [(A_3^* \varphi^2 + A_4^*) \sin v\delta + (A_4^* \varphi^2 - A_3^*) \cos v\delta] \end{aligned} \right\} \quad (23),$$

$$\left. \begin{aligned} e^{2s_1 \delta} [A_2^* \varphi^2 + A_1^*) \sin v\delta + (-A_1^* \varphi^2 + A_2^*) \cos v\delta] + \\ + [(A_4^* \varphi^2 - A_3^*) \sin v\delta + (-A_3^* \varphi^2 - A_4^*) \cos v\delta] = \frac{\varrho}{v} a \alpha^2 e^{s_1 \delta} \end{aligned} \right\} \quad (24).$$

v errechnet sich am einfachsten aus (5) mit Hilfe von (11). Vom besonderen Interesse ist hier nur

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\alpha \varrho} (g''(x) \sin \alpha t - f''(x) \cos \alpha t) \quad (25)$$

und der Weg y_0 des mitgeführten Zylinders

$$y_0 = -\frac{1}{\mu \alpha^2} [(A_2^* + A_4^*) \sin \alpha t + (A_3^* - A_1^*) \cos \alpha t] \quad (26).$$

4. Diskussion der Versuchsbedingungen

Eine besondere Anordnung der Apparatur zeichnete Lissajous-Figuren, die bei einer Phasenverschiebung von 90° zwischen dem angetriebenen und freischwingenden Zylinder in einer Gerade ausarteten, die meßtechnisch besonders leicht feststellbar war. Die Konstante von $\cos \alpha t$ in (26) muß in diesem Falle Null werden:

$$A_3^* = A_1^*.$$

Aus (21) bis (24) erhält man die Bestimmungsgleichung für G :

$$\left(\frac{v_{0kr} \delta}{\varphi}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{v_{0kr} \delta}{\varphi} = \varrho z \delta^2 + (v_{0kr} \delta \varphi) \cdot \operatorname{Zg} (v_{0kr} \delta \varphi) \quad (27).$$

v_{0kr} ergibt sich aus (19) mit α_{kr} . Die weitere Auswertung erfolgt im allgemeinen am einfachsten graphisch.

Ist jedoch $\vartheta \ll 1$, was bei den Danziger Versuchen stets der Fall war, so läßt sich (27) rechnerisch weiter behandeln. Man kann näherungsweise setzen:

$$\frac{1}{\varphi^n} + \varphi^n = 2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varphi^n} - \varphi^n = n \alpha \frac{\eta}{G} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Entwickelt man $\operatorname{tg} \frac{v_{0kr} \delta}{\varphi}$ und $\operatorname{Zg} (v_{0kr} \delta \varphi)$ in Reihen nach steigenden Potenzen und setzt die letzteren Näherungswerte ein, so ergibt sich schließlich für G :

$$G = \frac{\alpha_{kr}^2}{z} \frac{1 + k + 0,16 k^2 + \dots}{1 - V_0} \quad (28a).$$

Darin ist

$$k = 0,1 \left(\frac{\varrho \alpha_{kr} \delta^2}{\eta} \right)^2 \quad (29a), \quad z = \frac{1}{\mu \delta} \quad (29b)$$

und

$$V_0 = \frac{\varrho \mu \delta^3 \alpha_{kr}^2}{6 \cdot \eta^2} (1 + 0,4 k + 0,07 k^2 + \dots) \quad (30a).$$

(28a) enthält natürlich auch die Hartungssche Näherungslösung, bei der die Eigenträgheit der Flüssigkeit vernachlässigt wurde, denn mit $\varrho = 0$ geht (28a) über in

$$G = \frac{\alpha_{kr}^2}{z} \quad (28b).$$

(28b) ergibt für Newtonsche Flüssigkeiten ($G \rightarrow \infty$) als kritische Frequenz $\alpha_{kr} \rightarrow \infty$. Die Beobachtung einer kritischen Frequenz wurde also als Beweis einer Maxwell'schen Flüssigkeit angesehen. Bei Beachtung der Flüssigkeitsmasse ($\varrho \neq 0$) ergibt sich dagegen auch für Newtonsche Flüssigkeiten eine beobachtbare kritische Frequenz und die Abweichung zur Maxwell'schen Flüssigkeit ergibt nur eine Verschiebung dieser Frequenz. Das Kriterium der Maxwell'schen Flüssigkeit hängt also nicht an dem Auftreten einer kritischen Frequenz, sondern in der genauen Erfassung eines (gewöhnlich kleinen) Frequenzunterschiedes.

Für Newtonsche Flüssigkeiten ($G \rightarrow \infty$) ergibt sich unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von k aus (28a), was bei den Danzigern Versuchen gerechtfertigt ist.

$$\frac{\alpha_{kr}^2}{z} = \frac{6 \eta^2}{\varrho \delta^2} (1 - 0,24 \varrho z \delta^2) \quad (28c).$$

α_{kr}^2/z ist nach (28b) der Wert, der nach dem in Danzig gemachten Ansatz einer linearen Geschwindigkeitsverteilung über den Ringspalt identisch mit G sein sollte. Bei den Danzigern Versuchen ist noch $(0,24 \varrho z \delta^2)$ neben 1 vernachlässigbar, so daß bei Newtonschen Flüssigkeiten α_{kr}^2/z nur noch eine Funktion von ϱ , δ und besonders η ist. In diesem Falle erhält man bei Variation von z stets die gleichen Werte für α_{kr}^2/z , so daß auch diese in Danzig beobachtete Tatsache kein Kriterium für eine Maxwell'sche Flüssigkeit ist, wie man damals anzunehmen geneigt war.

Eine in Danzig entwickelte Amplitudenbeziehung war wegen der Streuung der Meßwerte nicht auswertbar. Auch die hier angegebene Verbesserung der Danziger Lösung kann daran kaum etwas ändern. Erst die Verbesserung der linearisierten Lösung führt im Abschn. 10 zu einer gut auswertbaren Amplitudenmethode.

5. Anwendung auf die Danziger Versuche

Die Genauigkeit der Größe V_0 ist zur Beurteilung der Flüssigkeit und Bestimmung des Schubmoduls entscheidend. Es ist daher notwendig eine Fehlerdiskussion für V_0 durchzuführen. Eine sichere Fehlerdiskussion ist nicht mehr möglich, da man bei der Danziger Näherung die Empfindlichkeit der Meßfehler auf die Bestimmung des Schubmoduls nicht sehen konnte. Deshalb achtete man auch nicht im notwendigen Maße auf die Kleinhaltung der Meßfehler und machte keine genaue Fehlerrechnung.

Eine nachträglich gemachte Überlegung, die von Herrn Prof. Fromm und Herrn Dr. Hartung stammt, ergab die Möglichkeit eines konstanten Apparatfehlers von $\pm 20\%$. Dazu kommt noch ein Fehler infolge η -Fehlbestimmung, so daß der Gesamtfehler -25 bzw. $+50\%$ betragen kann. Er dürfte aber kaum über diesen Wert liegen.

Ist $V_0=1$ bei fehlerlosen Angaben der Apparat- und Flüssigkeitswerte, so wird $G \rightarrow \infty$, d. h. es liegt der Newtonsche Grenzfall vor. Bei den hier möglichen Fehlern kann er auch bei

$$0,75 \leq V_0 \leq 1,50$$

vorhanden sein. In diesem Bereich läßt sich nicht sagen, ob ein Newtonscher, Maxwellscher oder gar ein dritter Flüssigkeitstyp vorliegt.

Ist $V_0 < 0,75$, so liefert (28a) einen positiven endlichen Wert für G und widerspricht nicht der Annahme einer Maxwellschen Flüssigkeit. Bei $V_0 > 1,50$ aber ist ein anderer Flüssigkeitstypus voraussetzen. In diesem Sinne sind die noch erhaltenen Danziger Versuchsergebnisse ausgewertet worden. Die sich an diesem Abschnitt anschließende Tabelle ergibt eine Zusammenstellung.

Zusammenstellung der Danziger Versuchsergebnisse.

Flüssigkeit	Temperatur °C	$\eta \cdot 10^3$ Poise	G nach (28 b) g/cm ²	V_0 nach (30 a)	G nach (28 a) g/cm ²	$\vartheta = \alpha \frac{\eta}{G}$
Dibuthylphthalat. .	20	0,208	0,020	0,83	ungewiß	—
	30	0,132	0,0088	0,92	„	—
	40	0,092	0,0040	0,83	„	—
	50	0,066	0,0018	0,73	0,0075	0,04
Dimethylphthalat. .	20	0,175	0,0175	1,06	ungewiß	—
	30	0,110	0,0067	1,02	„	—
	40	0,075	0,0026	0,87	„	—
	50	0,053	0,0010	0,65	0,0029	0,06
Diäthylphthalat . .	20	0,130	0,0124	1,73	Antimax.	—
	30	0,088	0,0048	1,16	ungewiß	—
	40	0,065	0,0018	0,81	„	—
	50	0,048	0,0007	0,57	0,0016	0,08
Glyzerin . . . 39%	20	0,036	0,0020	3,85	Antimax.	—
	63%	0,137	0,040	6,67	„	—
	87%	1,45	0,80	0,88	ungewiß	—
	87%	0,77	0,27	0,99	„	—
	87%	0,43	0,095	1,11	„	—
	87%	0,26	0,033	1,04	„	—
	87%	0,17	0,0115	0,86	„	—
	87%					
Öl	20	6,52	7,50	0,27	10	0,2!
	30	2,95	2,50	0,45	4,5	0,13!
	40	1,42	0,85	0,67	3,6	0,05
	50	0,75	0,30	0,83	ungewiß	—
	60	0,42	0,10	0,89	„	—
Teer	40	14	22	0,17	36	0,2!
	50	4,7	6,5	0,47	12	0,1!
	60	1,82	2,0	0,93	ungewiß	—

Man ersieht aus ihr, daß V_0 in der Mehrzahl zwischen 0,75 und 1,50 liegt und man hier keine Angaben über den Schubmodul machen kann, ja selbst der Flüssigkeitstypus ungewiß ist. Fünf Flüssigkeitsarten (acht Angaben) können Maxwellscher Natur sein. In diesem Falle dürften die hier gemachten Angaben über den Schubmodul richtig sein. Bei Diäthylphthalat und Glyzerin 39% und 63% muß dagegen bei 20° C ein dritter noch unbekannter Flüssigkeitstypus vorliegen. Interessant ist, daß Diäthylphthalat bei 20° C dem Maxwellschen Stoffgesetz widerspricht. Dieser Widerspruch nimmt mit steigender Temperatur immer mehr ab und bei 50° C scheint die Flüssigkeit von Maxwelltypus zu sein. Es könnten daher in einer Flüssigkeit

Eigenschaften vom Maxwell'schen und Antimaxwell'schen Charakter vereint sein, die beide in verschiedener Weise von der Temperatur abhängen. So könnte einmal der eine und das zweitemal der andere Typus überwiegen. Ähnliches scheint bei Glycerin vorzuliegen.

III. Abschätzung der durch die Linearisierung entstehenden Fehler

6. Verbesserung der linearisierten Lösung

Unter der Voraussetzung, daß die Amplitude der ersten Oberschwingung klein gegen die der Grundschiwingung ist, kann die Lösung des linearisierten Systems als eine erste bereits recht gute Näherung für $\partial v / \partial x$ (25) angesehen werden. Berechnet man diese für die Stelle des freischwingenden Zylinders und führt sie in das Grundsystem (3) und (4) ein, so erhält man ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen für σ und τ . Die Randbedingung (6) liefert eine einfache Gleichung zur Berechnung der Beschleunigung b des freischwingenden Zylinders. Die Gl. (5) ist hierbei dadurch berücksichtigt, daß sie zu dem Ergebnis (25) beigetragen hat, welches jetzt in (3) und (4) eingesetzt wird.

Für die Verhältnisse am freischwingenden Zylinder ($x=0$) läßt sich (25) unter Verwendung von (16) und (17) in der Form schreiben:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{a_1}{\delta} \alpha \sin \alpha t_1 \quad \dots \quad (31),$$

wenn

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{\delta \sqrt{(A_2^* + A_4^*)^2 + (A_3^* - A_1^*)^2} \sqrt{1 + \vartheta^2}}{\alpha G T} \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{(A_3^* - A_1^*) + \vartheta (A_2^* + A_4^*)}{(A_2^* + A_4^*) - \vartheta (A_3^* - A_1^*)} \\ t_1 &= t + \frac{\varepsilon}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (32)$$

gesetzt wird. Nennt man die Beschleunigung am freischwingenden Zylinder b , so folgt aus (6) $\tau_0 = \mu \cdot b$. Setzt man letzteren Wert und (31) in (3) und (4) ein, so erhält man das simultane lineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{b} + \frac{1}{T} \cdot b = \frac{a_1 \alpha}{\mu \delta} \sigma \sin \alpha t_1 + \frac{a_1 \cdot \alpha}{\mu \delta} \cdot G \cdot \sin \alpha t_1 \quad \dots \quad (33),$$

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{T} \cdot \sigma = -\frac{a_1}{\delta} \mu \alpha b \cdot \sin \alpha t_1 \quad \dots \quad (34).$$

Dieses läßt sich nach dem D'Alembert-Ampereschen Verfahren⁴⁾ lösen.

Wendet man diese Integrationsmethode auf den hier allein interessierenden Beharrungszustand, bei dem die Ausdrücke mit den beiden Integrationskonstanten Null werden, an, so erhält man für b und σ :

$$b = \frac{G}{\mu T} (\cos \lambda \cdot e^{-t_1/T} \int e^{t_1/T} \sin \lambda dt_1 - \sin \lambda \cdot e^{-t_1/T} \int e^{t_1/T} \cos \lambda \cdot dt_1) \quad \dots \quad (35),$$

$$\sigma = -G \left(1 - \frac{1}{T} \sin \lambda e^{-t_1/T} \int e^{t_1/T} \sin \lambda dt_1 + \frac{1}{T} \cos \lambda \cdot e^{-t_1/T} \int e^{t_1/T} \cos \lambda dt_1 \right) \quad (36).$$

Hier ist

$$\lambda = \frac{a_1}{\delta} \cos \alpha t_1.$$

7. Die Beschleunigung des freien Zylinders

Um eine für die numerische Rechnung für die Beschleunigung b brauchbare Formel zu erhalten, löst man $\cos \lambda$ und $\sin \lambda$ nach steigenden Potenzen von λ auf und ersetzt λ wieder durch $\frac{a_1}{\delta} \cos \alpha t_1$. Dann werden die ganzzahligen Potenzen von $\cos \alpha t_1$ nach den ganzzahligen Vielfachen von αt_1 entwickelt. Auf diese Weise erhält man:

$$\sin \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}^* \cos (2n+1) \alpha t_1 \quad \text{und} \quad \cos \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}^* \cos 2n \alpha t_1$$

⁴⁾ Kiepert: Grundriß der Integralrechnung, II. Bd. Seite 313 u. folg.

mit

$$E_{2n+j}^* = r_n \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{2i+j}{i-n} \frac{(a_1/2\delta)^{2i+j}}{(2i+j)!} \quad \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ j = 0 \text{ und } 1, \\ r_n = 2 \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots, \\ r_0 = 1. \end{array}$$

Setzt man die zuletzt angegebenen Formeln in die Integrale von (35) ein und trifft die Abkürzungen

$$\Theta_j = \frac{1}{1 + (j\delta)^2} \dots \dots \dots (37a), \quad \text{und} \quad T_j = \frac{j\delta}{1 + (j\delta)^2} \dots \dots \dots (37b),$$

so gewinnt nach einer leichten Integration (35) die Form:

$$b = -\frac{G}{\mu} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_{2n}^* E_{2m+1}^* T_{2m+1} \cos 2n\alpha t_1 \cdot \sin (2m+1)\alpha t_1 \right. \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_{2m}^* E_{2n+1}^* T_{2m} \cdot \cos (2n+1)\alpha t_1 \cdot \sin 2m\alpha t_1 \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_{2n}^* E_{2m+1}^* \Theta_{2m+1} \cos 2n\alpha t_1 \cdot \cos (2m+1)\alpha t_1 \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_{2m}^* E_{2n+1}^* \Theta_{2m} \cdot \cos 2m\alpha t_1 \cdot \cos (2n+1)\alpha t_1 \right\}.$$

Nach Vertauschen der Reihenfolgen der Summation und Zusammenfassen erhält man, wenn man noch die Produkte der trigonometrischen Funktionen durch die Summen ersetzt:

$$b = \frac{G}{2\mu} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_{2n}^* E_{2m+1}^* (T_{2m+1} - T_{2n}) \sin [2(m+n)+1]\alpha t_1 \right. \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_{2n}^* E_{2m+1}^* (T_{2m+1} + T_{2n}) \sin [2(m-n)+1]\alpha t_1 \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_{2n}^* E_{2m+1}^* (\Theta_{2m+1} - \Theta_{2n}) \cos [2(m+n)+1]\alpha t_1 \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_{2n}^* E_{2m+1}^* (\Theta_{2m+1} + \Theta_{2n}) \cos [2(m-n)+1]\alpha t_1 \right\}.$$

Es ist zweckmäßig in den Ausdrücken bei $\sin [2(m-n)+1]\alpha t_1$ und $\cos [2(m-n)+1]\alpha t_1$ das Vorzeichen von n zu wechseln und dann über n von $-\infty$ bis 0 zu summieren. Beachtet man noch, daß

$$T_{-2n} = -T_{2n} \quad \text{und} \quad \Theta_{-2n} = \Theta_{2n}$$

ist, setzt weiter formal

$$E_{-2n} = E_{2n} \dots \dots \dots (38)$$

fest und nimmt

$$E_{2n+j} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{2i+j}{i-n} \frac{(a_1/2\delta)^{2i+j}}{(2i+j)!} \quad \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ j = 1 \text{ und } 0 \end{array} \dots \dots (39),$$

so erhält man

$$b = \frac{2G}{\mu} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{2m+1} E_{2n} (T_{2m+1} - T_{2n}) \sin [2(m+n)+1]\alpha t_1 \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{2m+1} E_{2n} (\Theta_{2m+1} - \Theta_{2n}) \cos [2(m+n)+1]\alpha t_1 \right\}.$$

Schreibt man noch $n = k - m$ bzw. $n = -k - 1 - m$, so erhält man nach ein paar einfachen Umformungen:

$$b = \frac{2G}{\mu} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \sin (2k+1)\alpha t_1 + \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \cos (2k+1)\alpha t_1 \right\} \dots \dots \dots (40)$$

mit

$$A_{2k+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \{ E_{2m+1} E_{2m-2k} (T_{2m+1} + T_{2m-2k}) - E_{2m+1} E_{2m+2k+2} (T_{2m+1} + T_{2m+2k+2}) \} \quad (41)$$

und

$$B_{2k+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \{ E_{2m+1} E_{2m-2k} (\Theta_{2m+1} - \Theta_{2m-2k}) + E_{2m+1} E_{2m+2k+2} (\Theta_{2m+1} - \Theta_{2m+2k+2}) \} \quad (42).$$

Damit ist das Problem gelöst. Mittels (37), (38), (39), (41) und (42) kann man nach (40) b berechnen, durch Integration von diesem v_0 und durch nochmalige Integration y_0 .

8. Die Normalspannungen am freien Zylinder

a) Berechnung

σ berechnet sich am einfachsten, wenn man mit dem Ansatz

$$\sigma = G \sum_{k=0}^{\infty} (D_{2k} \sin 2k\alpha t_1 + C_{2k} \cos 2k\alpha t_1) \dots \dots \dots (43)$$

und (40) in (33) und (34) geht. Man erhält ein lineares Gleichungssystem, aus dem man die D_{2k} und C_{2k} berechnen kann, wenn die A_{2k-1} und B_{2k+1} bekannt sind. Von Interesse sind nur die ersten drei Werte. Man erhält für diese:

$$C_0 = -2 \frac{a_1}{2\delta} \vartheta A_1 \dots \dots \dots (44),$$

$$C_2 = + \frac{2\vartheta}{1+4\vartheta^2} \left(\frac{a_1}{2\delta} \right) [2\vartheta (B_1 - B_3) - (A_3 - A_1)] \dots \dots \dots (45),$$

$$D_2 = - \frac{2\vartheta}{1+4\vartheta^2} \left(\frac{a_1}{2\delta} \right) [2\vartheta (A_3 - A_1) + (B_1 - B_3)] \dots \dots \dots (46).$$

Die Normalspannungen lassen sich auch unmittelbar aus der Lösung der linearisierten Form berechnen. Im allgemeinen werden diese Werte nicht mit (43) übereinstimmen.

b) Anwendung auf die Danziger Versuche

Theoretische Erwägungen und numerische Rechnungen zeigen, daß bei nicht zu großen ϑ -Werten sich das nach (32) berechnete a_1 nicht nennenswert von der Amplitude a des antreibenden Zylinders unterscheidet. Daher soll in diesem Abschnitt a_1 gleich a gesetzt werden. Weiter zeigt eine einfache Überlegung, daß diese Näherung bis auf die Phasenverschiebung identisch mit der Annahme eines konstanten Geschwindigkeitsgefälles im Ringspalt ist, wenn die Amplitude des freien Zylinders etwa unter 10% von der des angetriebenen bleibt, was bei den Danziger Versuchen erfüllt war.

Mit dem Wert der Danziger Apparatur $a/2\delta = 3,67$ erhält man für die Werte der E_j nach (39):

E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
0,2847	0,0935	0,2592	0,2348	0,0673	0,3081	-0,3525	-0,2682
E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}
0,1580	0,0785	-0,0334	-0,0126	0,0042	0,0013	-0,0004	-0,0001

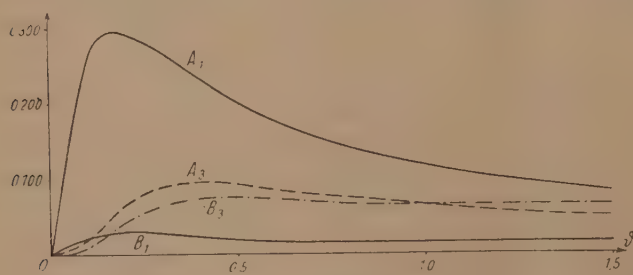


Bild 2

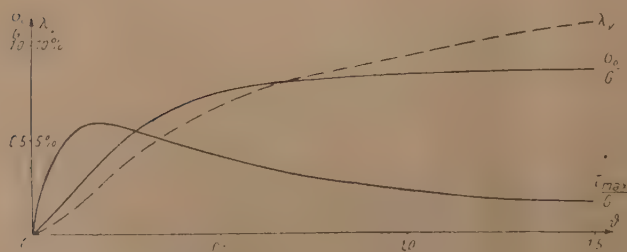


Bild 3

Nun sind nach (41) und (42) A_1 , A_3 , B_1 , B_3 berechnet und in Bild 2 als Funktion von ϑ dargestellt. Dabei ist auch die Rechnung für größere ϑ -Werte durchgeführt, als es bei den getroffenen Näherungen zulässig ist. Das Charakteristische bleibt aber auch da erhalten.

Man erkennt, daß die Amplitude der Grundschiwingung praktisch durch A_1 wiedergegeben wird. B_1 hat nur auf die Phasenverschiebung einen Einfluß, die hier von keinem besonderen Interesse ist.

Im Bild 3 ist das Ergebnis der Berechnung von $|\sigma_0/G|$ nach (41) und τ_{max}/G nach (6) und (40) dargestellt. Es interessiert hier besonders $|\sigma_0/G|$. Man erkennt, daß sich dieses mit steigendem ϑ asymptotisch 1 — genauer 0,92, wie die Rechnung zeigt — nähert.

In dasselbe Bild ist das prozentuale Verhältnis der Weg-Amplitude der ersten Oberschwingung zur Grundschiwingung aufgenommen. Es ist mit λ_v bezeichnet:

$$\lambda_v = \frac{\sqrt{A_s^2 + B_s^2}}{9\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} 100\% \quad (47).$$

Man erkennt aus der Darstellung, daß λ_v nur wenige Prozente beträgt. Die Oberschwingungen treten neben der Grundschiwingung nicht sehr in Erscheinung.

c) Kritik der Näherung $\sigma/G \ll 1$

Zur Beurteilung des Zulässigkeitsbereiches der hier getroffenen Näherung ist der Wert σ/G von Bedeutung. Bei der Linearisierung des Differentialgleichungssystems im Abschn. II ist σ/G neben 1 vernachlässigt worden. Über die dadurch entstehende Ungenauigkeit gibt Bild 4 einen Anhalt. Die Amplitude der mit der Kreisfrequenz 2α wechselnden Normalspannung ist gleich dem konstanten Anteil dieser Spannung. Daher kann man bis zu einem gewissen Betrag von σ/G ($1 + \sigma/G$) durch die Konstante ($1 + \sigma_0(x)/G$) ersetzen. Dabei ist aber zu beachten, daß $\sigma_0(x)$ noch eine Funktion von x ist. Man kann annehmen, daß für $|\sigma_0/G| \leq 0,2$ die Rechnung befriedigendes Vertrauen haben kann. Nach Bild 3 ist $\vartheta \sim 0,1$ für $|\sigma/G| = 0,2$. Demnach gilt unsere Rechnung für

$$\vartheta \leq 0,1.$$

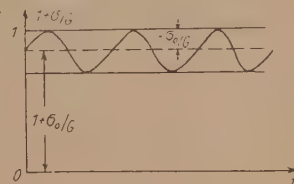


Bild 4

Diese Bedingung war bei den Danziger Versuchen fast stets erfüllt oder wurde nur wenig überschritten, so daß die Linearisierung hier zulässig ist.

Man kann noch höhere ϑ -Werte zulassen, wenn man in (3) ($1 + \sigma/G$) durch ($1 + \sigma_{0\text{mittel}}/G$) ersetzt. Dabei bedeutet $\sigma_{0\text{mittel}}$ einen Mittelwert des konstanten Anteil von $\sigma - \sigma_0(x)$ — über die Breite des Ringspalt genommen. Überschlagsmäßig kann man $\sigma_{0\text{mittel}}/G$ durch σ_0/G ersetzen. Dann können die Ergebnisse der Rechnung des linearisierten Systems (Abschn. II) übernommen werden, wenn man für G einen konstanten Abminderungsfaktor einführt. Setzt man also in (3) statt G G_1 mit

$$G_1 = G \cdot f \quad (48a), \quad \eta_1 = \eta \cdot f \quad (48b) \quad \text{und} \quad f = 1 + \sigma_0/G \quad (48c),$$

so wird (3) zu

$$\frac{1}{G_1} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1} \cdot \tau = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Aus der letzten Form der Gl. (3) erkennt man, daß man eine gewisse Berücksichtigung von $1 + \sigma/G$ erhält, wenn man in den Ergebnissen des Abschn. II G durch G_1 und η durch η_1 ersetzt. Man wird aber auch hier eine gewisse Einschränkung für σ_0/G , d. h. f vorschreiben müssen, die ungefähr bei

$$|\sigma_0/G| \leq 0,4$$

angesetzt werden kann. Nach Bild 3 kann man setzen

$$f = (1 - 2\vartheta) \quad (48d)$$

mit der Bedingung $\vartheta \leq 0,20$. Damit wird (28a) zu

$$(28d) \quad G = \frac{\alpha_{kr}^2/z(1+k+\dots)}{(1-V)f} \quad \text{mit} \quad (30b) \quad V = \frac{V_0}{f^2} \quad (V_0 \text{ nach } (30a)).$$

(28d) ist durch Iteration zu lösen.

Aus der Form von (30b) ersieht man, daß die negativen Werte für G , die sich aus den Danziger Versuchen bei Anwendung der Formel (28a) ergeben, nicht durch die verbesserte Näherung nach (28d) positiv werden können. Da $f \leq 1$ ist, wird V nach (30b) bei von 1 merkbar unterschiedlichen Werten von f noch größer als V_0 .

9. Anwendung der Amplitudenmethode

Im Abschn. 5 wurde erwähnt, daß eine Auswertung der Amplitudenmethode mittels der Rechnung für das linearisierte System an der für die Streuung der Meßwerte zu große Empfindlichkeit dieser Methode scheitert. Von entscheidendem Nachteil ist hierbei, daß die Linearisierung nur für einen schmalen Bereich von Anfangswerten der Kreisfrequenz zulässig ist. Mit Hilfe der verbesserten Rechnung (Abschn. III) kann man auch größere Kreisfrequenzwerte für die Auswertung zulassen und dadurch eine Methode nicht nur zur Abschätzung des Schubmoduls,

nach unten“ iteriert, ergibt sich die Vorschrift

$$x_i^{(v+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left[\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k^{(v+1)} + \sum_{k=i+1}^n a_{ik} x_k^{(v)} + a_i \right] \quad (B).$$

Geht man von der n -ten Gleichung aus, iteriert also „von unten nach oben“, so hat man in (B) nur auf der rechten Seite $x_k^{(v+1)}$ mit $x_k^{(v)}$ zu vertauschen.

Für die Verfahren (A) und (B) stammt von Collatz³⁾ die gemeinsame hinreichende Konvergenzbedingung

$$\max_i \mu_i = \max_i \sum_{k \neq i}^n \left| \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \right| = \mu < 1 \quad \dots \quad (2)$$

mit der Fehlerabschätzung

$$\max_i |x_i^{(v+1)} - x_i| \leq \frac{\mu}{1-\mu} \max_i |x_i^{(v)} - x_i^{(v+1)}| \quad (3).$$

Der im allgemeinen besseren Konvergenz des Einzelschrittverfahrens (B) werden die folgenden hinreichenden Konvergenzkriterien mehr gerecht:

Kriterium I. Das Einzelschrittverfahren (B) konvergiert, wenn

$$\max_i \alpha_i = \alpha < 1 \quad \dots \quad (4)$$

bleibt, wobei die α_i durch die Rekursionsformel

$$\alpha_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \left[\sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| \alpha_k + \sum_{k=i+1}^n |a_{ik}| \right] \quad \dots \quad (5)$$

erklärt sind. Dabei gilt die Fehlerabschätzung (3), wenn dort μ durch α ersetzt wird:

$$\max_i |x_i^{(v+1)} - x_i| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_i |x_i^{(v)} - x_i^{(v+1)}| \quad (6).$$

Die α_i werden also nach der Iterationsvorschrift (B) unter Fortlassen der a_i , Nehmen der Absolutbeträge und mit Ausgangswerten 1 berechnet.

Kriterium II. Das Einzelschrittverfahren (B) konvergiert, wenn

$$\max_i \beta_i = \beta < 1 \quad \dots \quad (7)$$

bleibt, wobei die β_i durch die Rekursionsformel

$$\beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \left[\left(\sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| \right) (\max_{e < i} \beta_e) + \sum_{k=i+1}^n |a_{ik}| \right] \quad (8)$$

erklärt sind. Dabei gilt die Fehlerabschätzung (9)

$$\max_i |x_i^{(v+1)} - x_i| \leq \frac{\beta}{1-\beta} \max_i |x_i^{(v+1)} - x_i^{(v)}| \quad (9).$$

Die β_i entstehen also durch Vergrößerung der α_i , indem man während der Rekursion mit dem Maximum der bereits gefundenen β , weiterrechnet; dadurch lassen sich vorbereitend die Koeffizientenbeträge links und rechts der Hauptdiagonale summieren und somit Multiplikationen einsparen.

Eine weitere Vergrößerung würde darin bestehen, in (8) rechts $\max \beta_e = 1$ zu nehmen; dadurch kommt man auf die bisherige Bedingung (2) zurück. Die Verbesserung durch die neuen Kriterien zeigt sich besonders deutlich am Falle eines gestaffelten Systems, bei dem rechts der Hauptdiagonale alle $a_{ik} = 0$ sind. Hier geben nämlich die Kriterien I und II die Werte $\alpha = \beta = 0$, d. h. sie lassen erkennen, daß in diesem Falle die Iterationsvorschrift die exakte Lösung in einem Schritt liefert. Das alte Kriterium (2) zeigt dagegen die exakte Lösung erst dann an, wenn alle a_{ik} für $i \neq k$ null sind.

Beweis der Kriterien I und II. Wegen

$$\alpha \leq \beta \quad \dots \quad (10)$$

³⁾ L. Collatz: Fehlerabschätzung für das Iterationsverfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 357–381.

genügt es, das Kriterium I zu beweisen. Mit

$$x_i^{(v)} = x_i + y_i^{(v)} \quad \dots \quad (11)$$

folgt aus (B) und (1)

$$y_i^{(v+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left[\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} y_k^{(v+1)} + \sum_{k=i+1}^n a_{ik} y_k^{(v)} \right] \quad (12)$$

und weiter

$$|y_i^{(v+1)}| \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left[\sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| \cdot |y_k^{(v+1)}| + \sum_{k=i+1}^n |a_{ik}| \cdot |y_k^{(v)}| \right] \quad (13).$$

Setzen wir

$$\max_i |y_i^{(v)}| = \varepsilon \quad \text{und} \quad \delta_i = \frac{1}{\varepsilon} |y_i^{(v+1)}| \quad (14),$$

so wird

$$\delta_i \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left[\sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| \delta_k + \sum_{k=i+1}^n |a_{ik}| \right] \quad (15)$$

Ein Vergleich mit der Folge (5) lehrt

$$\delta_i \leq \alpha_i \quad \text{und} \quad \max_i \delta_i \leq \max_i \alpha_i = \alpha \quad \dots \quad (16).$$

Da nun aus (14) folgt

$$\max_i |y_i^{(v+1)}| = \varepsilon \max_i \delta_i \quad \dots \quad (17),$$

besteht nach (16) die Ungleichung

$$\max_i |y_i^{(v+1)}| \leq \alpha \varepsilon = \alpha \max_i |y_i^{(v)}| \quad \dots \quad (18),$$

also

$$\max_i |y_i^{(v+1)}| \leq \alpha^{v+1} \max_i |y_i^{(0)}| \quad \dots \quad (19).$$

Hiernach ist für $\alpha < 1$ Konvergenz gewährleistet.

Zur Fehlerabschätzung bilden wir

$$\left. \begin{aligned} \max_i |x_i^{(v)} - x_i^{(v+1)}| &= \max_i |y_i^{(v)} - y_i^{(v+1)}| \\ &\geq \max_i |y_i^{(v)}| - \max_i |y_i^{(v+1)}| \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

und finden mit (18)

$$\left. \begin{aligned} \max_i |x_i^{(v+1)} - x_i^{(v)}| &\geq \frac{1}{\alpha} \max_i |y_i^{(v+1)}| \\ &\quad - \max_i |y_i^{(v+1)}| \end{aligned} \right\} \quad (21).$$

Es gilt also

$$\left. \begin{aligned} \max_i |x_i^{(v+1)} - x_i| &= \max_i |y_i^{(v+1)}| \\ &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_i |x_i^{(v+1)} - x_i^{(v)}| \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (22)$$

oder (6), was zu beweisen war.

Zahlenbeispiel. Wir schreiben zur besseren Übersicht nur das Schema der Koeffizienten an und nehmen als Ausgangswerte $x_i^{(0)}$ für die Iteration nach dem Einzelschrittverfahren (B) die a_i :

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_i	$x_i^{(0)}$	$x_i^{(1)}$	$x_i^{(2)}$	x_i	μ_i
1	-1,0	0,2	-0,1	0,0	0,7	0,7	0,81	0,98	1	0,3
2	0,8	-1,0	0,1	-0,1	1,3	1,3	1,94	2,00	2	1,0
3	-0,9	0,1	-1,0	0,1	1,5	1,5	1,13	1,01	1	1,1
4	0,6	-0,3	0,4	-1,0	1,6	1,6	1,96	1,99	2	1,3

Wegen $\max_i \mu_i = \max_i \sum_{k=1}^4 \left| \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \right| = 1,3$ versagt das Kriterium (2).

Anwendung des Kriteriums I ergibt

$$\alpha_1 = \frac{1}{|-1|} [+ 0,2 + |-0,1| + 0] = 0,3,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{|-1|} [0,8 \cdot 0,3 + 0,1 + |-0,1|] = 0,44,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{|-1|} [|-0,9| \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,44 + 0,1] = 0,414,$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{|-1|} [0,6 \cdot 0,3 + |-0,3| \cdot 0,44 + 0,4 \cdot 0,414] = 0,4776.$$

Die Feststellung $\text{Max } \alpha_i = \alpha \approx 0,48 < 1$ erweist das Verfahren (B) als konvergent.

Das Kriterium II liefert $\alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha_2 = \beta_2$, weiter

$$\beta_3 = \frac{1}{|-1|} [(|-0,9| + 0,1) 0,44 + 0,1] = 0,54,$$

$$\beta_4 = \frac{1}{|-1|} [(0,6 + |-0,3| + 0,4) \cdot 0,54] = 0,702.$$

Wegen $\text{Max } \beta_i = \beta = 0,702 < 1$ zeigt auch das größere Kriterium II noch die Konvergenz des Verfahrens (B) beim vorliegenden Gleichungssystem an. Für die Fehlerabschätzung ist (3) überhaupt nicht anwendbar, (6) liefert für $x_i^{(2)}$

$$\begin{aligned} \text{Max}_i |x_i^{(2)} - x| &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{Max}_i |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| \\ &= \frac{1-0,4776}{0,4776} \cdot 0,17 < 0,16. \end{aligned}$$

Tatsächlich sind die $x_i^{(2)}$, wie ihr Vergleich mit den exakten x_i zeigt, genauer.

Darmstadt.

H. Sassenfeld.

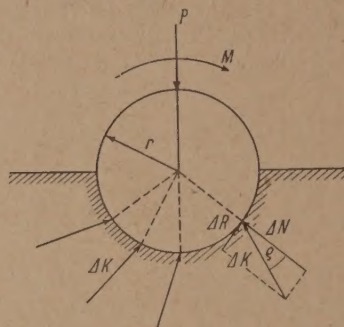
Zur elementaren Theorie der Zapfenreibung.

In vielen Lehrbüchern über technische Mechanik und technischen Handbüchern wiederholt sich bei der Behandlung der Zapfenreibung in allen Auflagen ein anscheinend bisher merkwürdigerweise nicht bemerkter Fehler.

Der Zapfen vom Radius r wurde durch die gegebene Kraft P gegen das Lager gepreßt. Das Moment M , das nötig ist um den Zapfen zu drehen, bzw. das im Grenzfall des Haftens gerade noch Gleichgewicht hält, wird angesetzt: $M = r \Sigma \Delta R$, wobei die Reibungskräfte ΔR gleich dem Produkt aus der Reibungszahl μ und den Normaldruckkräften ΔN sind, deren Verteilung

jedoch im allgemeinen unbestimmt ist. Um wenigstens eine untere Grenze für M festzulegen, wird nun in der in Frage stehenden Ableitung das Gleichgewicht des ruhenden Zapfens ohne Reibung herangezogen, für welches gilt:

$$\Sigma \Delta N > P. \quad (1),$$



weil die algebraische Summe der Seiten des Kräftepolygons der ΔN größer ist als seine Schlußlinie P . Damit kann geschrieben werden:

$$M = \alpha \mu r P \quad (2),$$

wobei für die Zahl α gilt:

$$\alpha > 1 \quad (3).$$

Die Anwendung der Gleichgewichtsungleichung (1) auf den Fall mit Reibung ist unzulässig. Für diesen Fall gilt vielmehr analog: $\Sigma \Delta K > P$, wo ΔK die Resultanten aus Normaldrücken und Reibungskräften bedeuten (zur Gleichgewichtsbetrachtung denke man sich P mit M zu einer gleich großen gleichgerichteten Kraft zusammengefaßt, deren Wirkungslinie nach rechts verschoben ist). Mit Einführung des Reibungswinkels ϱ durch die bekannte Definition: $\text{tg } \varrho = \mu$ wird $\Delta R = \Delta K \sin \varrho$ und M ergibt sich zu $M > r P \sin \varrho$. Wenn daher der Ausdruck für M in der Form (2) beibehalten werden soll, ist Ungl. (3) richtig zu ersetzen durch:

$$\alpha > \cos \varrho.$$

Der Grenzfall $\alpha = \cos \varrho$ (der nach (3) unmöglich wäre) tritt ein, wenn in einem Lager mit Spiel die Berührung nur längs einer Erzeugenden des Zapfens erfolgt.¹⁾

Tucumán.

E. Mönch.

¹⁾ Der gleiche Gedanke ist schon in dem Buche H. Blasius Mechanik I, Hamburg 1948, geäußert worden.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. Ing. R. Zurmühl, Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure. XV + 427 Seiten mit 25 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis geb. 25,50 DM.

Matrizenrechnung ist vielen Ingenieuren heute noch unbekannt, oft sogar auch dem Namen nach, und doch verdient sie ebenso beachtet zu werden wie andere große Gebiete der Mathematik, z. B. die Vektorrechnung. Die Matrizen bilden ein übersichtliches und weitreichendes Hilfsmittel für alle Untersuchungen, bei denen mathematisch gesprochen lineare Systeme zu behandeln sind, z. B. Systeme linearer Gleichungen, linearer Differentialgleichungen, Systeme von Strom- und Spannungsgrößen in elektrischen Netzen usw. Auch z. B. bei kleinen Schwingungen sind die Matrizen das dem Problem angepaßte Mittel, und es wird wohl gerade bei den mechanischen und elektrischen Schwingungen die Überlegenheit der Matrizen dazu führen, daß sie in der Lehrbuchliteratur und dann

auch im Hochschulunterricht den ihnen gebührenden Platz einnehmen.

Es gibt über Matrizen bis jetzt nur wenige lehrbuchmäßige Darstellungen, teils in englischer Sprache und schwer zugängliche, wie etwa das Buch von R. A. Frazer, W. J. Duncan, A. R. Collar, *Elementary Matrices*, Cambridge 1938, teils wie etwa das ausgezeichnete Buch von W. Schmeidler, *Vorträge über Determinanten und Matrizen*, Berlin 1949, für den mathematisch nicht besonders vorgebildeten Ingenieur zu konzentriert geschrieben. Es ist daher sehr verdienstvoll, daß sich der Verfasser der nicht einfachen Aufgabe unterzogen hat, mit seinem Buche für die Matrizen zu werben und eine Einführung für Ingenieure zu geben, die aber zugleich so ausführlich und weitreichend ist, daß sie auch bei komplizierteren Anwendungen als Handbuch dienen kann. Durch diese Aufgabe wird die Darstellungsart des Buches bestimmt, das Buch wendet sich nicht an den

Mathematiker, sondern will den Ingenieur mit dem neuen Gebiet vertraut machen, ohne ihn mit langen strengen Beweisen zu ermüden.

Das I. Kapitel bringt Grundlagen der Matrizenalgebra, das II. Kapitel Determinantensätze, Rang einer Matrix und lineare Gleichungssysteme, das III. Kapitel Formen und lineare Transformationen, das IV. Kapitel das Eigenwertproblem, erst für reelle symmetrische Matrizen, dann für beliebige komplexe, mit „speziellen“ und „allgemeinen“ Eigenwertaufgaben, und Paare quadratischer Formen, das V. Kapitel die Struktur einer Matrix, Elementarteilerttheorie, Zurückführung auf verschiedene Normalformen, Hauptvektoren, Matrizenfunktionen. Das VI. Kapitel bringt von den zahlreichen bisher aufgestellten numerischen Verfahren die wichtigsten Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme und Bestimmung der charakteristischen Zahlen von Matrizen (bei Schwingungsaufgaben ist das die Bestimmung der Eigenfrequenzen). Das VII. Kapitel ist den Anwendungen gewidmet, davon der erste Paragraph der Elektrotechnik. Der nächste sehr wichtige Paragraph gibt eine geschlossene Theorie der kleinen Schwingungen. Es folgen Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, wieder mit zahlreichen Zahlenbeispielen, Differentialmatrizen, nichtlineare Transformationen, Tensoren und Matrizen in der Ausgleichsrechnung. Vielleicht ist manchmal der Verfasser in seiner Liebe zu den Matrizen etwas weit gegangen, z. B. bei der Darstellung der Tensoren, bei denen der Referent lieber den in der Mathematik entwickelten Tensorkalkül verwenden würde, aber der Verfasser hat sich ein großes Verdienst erworben, indem er in dem ganzen sich auf die Anwendungen beziehenden Kapitel häufig Dinge, die schon bekannt waren, durch Umschreibung in die Matrizen Sprache in neuer einfacherer Weise darstellt.

Man möchte dem sorgfältigen und gründlichen Buche wünschen, daß es von recht vielen Ingenieuren benutzt und möglichst auch durchgearbeitet wird.

Hannover.

Collatz.

Dr.-Ing., Dr.-Ing. e. h. R. Grammel (Prof. a. d. Techn. Hochschule Stuttgart), *Der Kreisel, seine Theorie und Anwendung*. Zweite neubearbeitete Aufl. Erster Band: *Die Theorie des Kreisels*. XI + 281 S., m. 137 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950. Preis brosch. 30,— DM, geb. 33,— DM.

Das Grammelsche Buch über den Kreisel war seit vielen Jahren vergriffen und sehr gesucht. Allgemein wird daher sein Wiedererscheinen begrüßt werden, umso mehr, als es durch eine vollständige Umarbeitung ganz wesentlich gegenüber der alten Auflage gewonnen hat. Die beiden Abschnitte der früheren Auflage sind jetzt zu je einem Bande erweitert. Davon liegt der erste, der die Theorie bringt, vor. Er beginnt mit einer ausführlichen Darstellung der für die Kreiseltheorie nötigen Grundlagen der Vektorrechnung und der Mechanik und mit einer Ableitung der wichtigsten Eigenschaften des Trägheitstensors, bringt dann im zweiten Abschnitt den symmetrischen Kreisel (kräfte-

frei, geführt, unter Zwang und Stoß und schwer) und anschließend im dritten den kräftefreien und den schweren unsymmetrischen Kreisel. Hier wird auch die Staudesche Drehung sowie die Nachbarbewegungen der stabilen dieser Drehungen behandelt. Der vierte Abschnitt bespricht interessante Fälle des Kreisels im weiteren Sinne wie Spielkreisel, Gyrostat, rollendes Rad und rollende Kugel, behandelt ferner die Theorie allgemeiner gyrostatischer Systeme. In einem Anhang endlich wird die Kreiselbewegung durch Thetafunktionen dargestellt. So ist ein didaktisch außerordentlich geschickter Aufbau der Kreiseltheorie entstanden, bei dem immer der Hauptwert darauf gelegt ist, einen Einblick in die mechanischen Vorgänge zu gewinnen und bei dem die mathematischen Entwicklungen überall diesem Ziel untergeordnet sind. Auch im einzelnen kommt überall die reiche Lehr Erfahrung des Verfassers zur Geltung. Dadurch, daß die Ergebnisse der Entwicklung jeweils in kurzen prägnanten Sätzen zusammengefaßt sind, wird die Durcharbeitung des schönen Buches wesentlich erleichtert. Erfreulich ist ferner, das noch in diesem Jahre auch der zweite Band, der die Anwendungen bringt, erscheinen wird.

Dresden.

Willers.

H. Beer, W. Flügge, K. Karas, K. Marguerre, Th. Pöschl, E. Reißner, A. Schleusner, S. Timoshenko, E. Chwalla, O. Dedić, E. Friedrich, O. K. Fröhlich, P. Funk u. E. Berger, G. Heinrich, K. Kriso, A. Leon u. F. Vitovec, W. Mudrak, F. Müller-Magyar, H. Parkus, A. Pucher, F. Reinitzhuber, A. Slibar u. F. Vitovec, F. Söchting, E. Tschegg, E. Tuml, H. Winter. Beiträge zur angewandten Mechanik, 413 S. mit zahlreichen Abb. Wien 1950. Franz Deuticke Verlag. Preis: 30,— DM.

Aus Anlaß des 65. Geburtstages des Ordinarius für Allgemeine Mechanik, Hydro- und Aeromechanik an der Techn. Hochschule Graz Prof. Dr. Federhofer und des 60. Geburtstages des Ordinarius für Technische Mechanik an der Techn. Hochschule Wien Prof. Dr. Girkmann haben ihnen Freunde und Schüler eine Festschrift gewidmet. Aus zeitbedingten Gründen wurden die Arbeiten auf photomechanischem Wege vervielfältigt; auch so ist ein außerordentlich sauberes und übersichtliches Satzbild entstanden. An den Anfang des Bandes sind kurze Lebensläufe und Schriftenverzeichnisse der beiden Jubilare gesetzt. Es folgen 26 Abhandlungen, die sich in der Hauptsache mit Problemen aus den Arbeitsgebieten der beiden Herren beschäftigen. Man findet sechs Arbeiten aus dem Gebiet der Baukonstruktionslehre, sechs, die sich mit der Theorie der Platten und Schalen beschäftigen, sieben behandeln andere Probleme der Elastizitätstheorie, drei Eigenwertprobleme und die restlichen vier verschiedene Fragen der Kreiseltheorie, der Bodenmechanik usw. Auf die einzelnen Beiträge einzugehen, fehlt hier der Raum. Doch sei betont, daß der vorliegende Band eine Reihe sehr wertvoller Abhandlungen bringt.

Dresden.

Willers.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten)

H. Heyde (Prof. a. d. Humboldt-Univ. Berlin), *Mechanik für Ingenieure*. Bd. I: *Statik/Dynamik* (Teubners Fachbücher für Maschinenbau und Elektrotechnik). X + 322 S. mit 317 Abb. Leipzig 1950. B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. Preis geb. 13,40 DM.

K. Federhofer (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Graz), *Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers*. Teil I: *Statik*. V + 130 S. mit 243 Textabb. Wien 1950. Springer-Verlag. Preis 9,60 DM.

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin, Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher: Sammelnummer 42 55 71. Postcheckkonto: Berlin 85 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/31/3. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15.— zuzüglich Bestellgeld. Einzelheft DM 6.—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, anderenfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber Berlin. E/V/12/7 — 0,95 — (245).